Lic. CPA Freddy A. Camargo

- *Licenciado en Contaduría Pública*
- *Diplomado en Investigación y Formación Tutorial CEPI*
- *Diplomado en la Enseñanza de la Matemática en la Educación Superior*
- *Diplomado en Análisis Financiero*

- *Certificado en Normas Internacionales de Auditoria (NIA)*
- *Certificado en Normas Internacionales de Información Financiera (NIIF)*
- *Certificado en Normas de Contabilidad Generalmente Aceptadas en Bolivia (NCGA)*

Freddy Camargo
Freddy A. Camargo

ISBN: 978-9917-0-1498-0

Matemática para Ciencias Económicas y Financieras

Matemática para Ciencias Económicas y Financieras, guía de ejercicios

Lic. CPA Freddy A. Camargo Chambi

MATEMÁTICA

Para Ciencias Económicas y Financieras, guía de ejercicios

Freddy A. Camargo Chambi

2022

Título de la Obra

Matemática para Ciencias Económicas y Financieras, guía de ejercicios

Autor: Freddy Alejandro Camargo Chambi

Primera Edición
Año de Publicación: **2022**

Depósito Legal: **3 - 1 - 163 - 2022**

ISBN: **978 - 9917- 0 – 1498 - 0**

Sucre - Bolivia

AGRADECIMIENTO

A "Dios" nuestro creador

A mi querida familia

Y a las personas que día a día se esfuerzan por ser personas de provecho y por colaborar para que Bolivia tenga un futuro mejor.

Presentación

Matemática para Ciencias Económicas y Financieras, guía de ejercicios, es un libro para los estudiantes de la Facultad de Contaduría Pública y Ciencias Financieras, Carrera de Contaduría Pública para la Materia de Matemáticas (MAT 100). Se trata de un material pensando en los estudiantes de primer año de la carrera.

La pretensión de este libro es hacer conocer y entender las aplicaciones de las matemáticas a las Ciencias Económicas y Financieras, como ser el análisis de costo – beneficio, así como también de hallar el precio máximo al cual ofrecer mi producto, el costo mínimo de mi producción. Logrando a que la toma de decisiones sea lo más eficaz y eficiente posible

El estudiante encontrará en la presente obra una guía de ejercicio que le permitirá resolver cada ejercicio de la forma más sencilla y accesible, sin perder lógicamente los márgenes de cientificidad y profundidad, que un trabajo de esta índole requiere; entonces, les corresponderá a los lectores juzgar en qué medida se alcanzó este objetivo

Me queda, Agradecer al más grande matemático y calculador del universo, de quien sus obras combinan: razón, belleza, armonía y perfección, estoy hablando del creador "Dios" que mediante el, logremos descifrar los secretos del universo.

Sucre – Bolivia, enero de 2022

Lic. CPA Freddy A. Camargo Chambi

Experiencia del autor en la enseñanza

Freddy Alejandro Camargo Chambi ha culminado sus estudios en Contaduría Pública de la prestigiosa Facultad de Ciencias Económicas y Financieras de la UMSA (La Paz, Bolivia).

*Se ha desempeñado como auxiliar de Docencia (Previo examen de competencia) en la **Facultad de Ciencias Económicas y Financieras UMSA, de:***

- *GABINETE DE AUDITORIA FINANCIERA*
- *CONTABILIDAD INTERNACIONAL (2 Gestiones Consecutivas)*
- *CONTABILIDAD INTERMEDIA*
- *CONTABILIDAD BÁSICA*
- *CÁLCULO I (2 Gestiones Consecutivas)*

*Se ha desempeñado como auxiliar de Docencia (Previo examen de competencia) en la **Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales USFX, de:***

- *ANÁLISIS MATEMATICO I (2 Gestiones Consecutivas)*
- *ESTADISTICA I (2 Gestiones Consecutivas)*

***Como instructor en la Academia Newton**:*

- *MATEMÁTICA PREUNIVERSITARIA*
- *INTRODUCCIÓN A LA CONTABILIDAD*

Como instructor en la Academia La Paz

- *CÁLCULO I*
- *MATEMATICA FINANCIERA*
- *ESTADISTICA I y II*

Índice

DESIGUALDADES E INECUACIONES

1.-Desigualdades

Es la relación que establece que dos cantidades tienen diferentes valores.

Los signos que se utilizan para designar desigualdades son:

$$> \textit{se lee}: \text{"mayor que"}$$

$$< \textit{se lee}: \textit{"menor que"}$$

$$\geq \textit{se lee}: \textit{"mayor o igual que"}$$

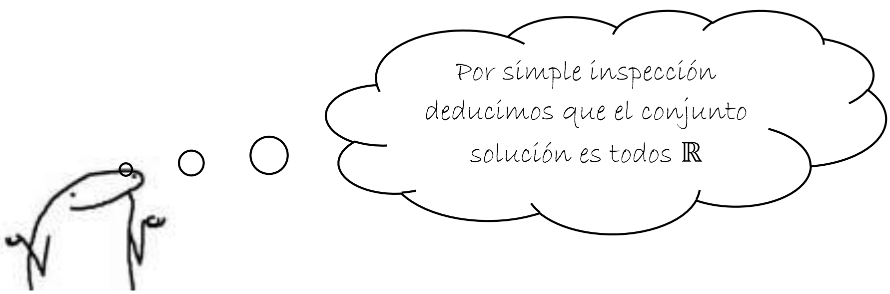
$$\leq \textit{se lee}: \textit{"menor o igual que"}$$

2.- Clases de Desigualdades

2.1. Desigualdades Absolutas

Son aquellas que se verifican para cualquier valor o sistemas de valores, dado a sus letras.

$$(x+2)^2 + 12 > 0$$



2.2. Desigualdad relativa o inecuaciones

Son aquellas que se verifican para determinar dos valores o sistemas de valores, asignados a sus letras.

$$3x - 7 > 14$$

Solo se satisface para $x > 7$

3.- Conjunto solución

Es aquel conjunto que agrupa a todas las soluciones particulares (si existen) de una inecuación. Si la inecuación no posee solución, entonces será un conjunto vacío.

4.- Resolver una inecuación

Consiste en hallar su conjunto solución. La resolución se realiza aplicando pasos que más adelante detallaremos.

4.1 Teoremas que nos ayudan a resolver inecuaciones

$$ab > 0 \iff (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

$$ab < 0 \iff (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$$

$$\frac{a}{b} > 0 \iff (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

$$\frac{a}{b} < 0 \iff (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$$

4.2 Criterio de los puntos críticos

1) Se lleva todo término de la inecuación a un solo miembro
2) Si la expresión del primer miembro fuese una expresión fraccionaria, entonces debe sacarse mínimo común denominador y luego simplificar numerador y denominador si fuese posible
3) Se debe factorizar completamente numerador y denominador la expresión del primer miembro
4) Se calcula los puntos críticos, los cuales vienen a ser los valores que asume la incógnita al igualar a cero cada factor obtenido al factorizar en el anterior paso
5) Se traslada los puntos en forma ordenada a la recta real. Luego si la desigualdad contiene el símbolo "≥" o "≤" entonces los puntos críticos del numerador se incluyen y los puntos críticos del denominador no se incluyen, si la desigualdad contiene el símbolo ">" o "<" entonces no se incluye ningún punto crítico (es decir no se sombrea ningún punto crítico)
6) Se toma un punto interior a cualquier intervalo reemplazándole este valor en la última expresión factorizada, si este valor hace verdadera la desigualdad entonces dicho intervalo se incluye en el conjunto solución y los intervalos adyacentes a este no se incluyen o sea se va alternando; esto solo en el caso de que los factores fueren de multiplicidad par no se cumple la alternancia.

Por otro lado, si dicho valor hace falsa la desigualdad entonces este intervalo no se incluye en el conjunto solución y los intervalos adyacentes a este son parte del conjunto solución, dándose el mismo trato con los factores de multiplicidad impar

7) Cada zona determina por dos puntos críticos consecutivos, se representan alternadamente de derecha hacia izquierda con los signos (+) y (-). Se inicia con el signo (+)

Ejemplo 1

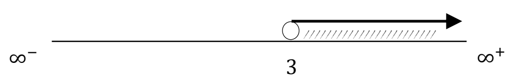
$$6x - 4 > 2x + 8$$

$6x - 2x > 4 + 8$

$4x > 4 + 8$

$4x > 12$

$x > 3$



El conjunto solución es : $x \in \;]3, \infty[$

Ejemplo 2

$$3(x - 4) + 4x < 7x + 2$$

$$3x - 12 + 4x - 7x - 2 < 0$$

$$-12 + 7x - 7x - 2 < 0$$

$$-14 < 0$$

Esta desigualdad obtenida es cierta, entonces la solución de la inecuación dad, es el conjunto de todos los números reales

$(x \in \mathbb{R})$

Ejemplo 3

$$4x^2 + 9x + 9 < 0$$

Por simple inspección vemos que cualquier valor de $\boldsymbol{x}$ la expresión será positivo por lo tanto la solución de la inecuación será conjunto vacío $(\emptyset)$

Ejemplo 4

$$4x^2 - 4x + 7 > 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4(4)(7)$

$\Delta = 16 - 112$

$\Delta = -96$

El discriminante de la inecuación es negativa por lo tanto el conjunto solución será todos los reales $(x \in \mathbb{R})$

5.- Aplicaciones de las inecuaciones a la administración y Economía

Ejercicio 1

Determine el costo mínimo C (en bolivianos) dado que:

$$5(C-25) \geq 1{,}75 + 2{,}5C$$

Solución:

$$5(C-25) \geq 1{,}75 + 2{,}5C$$

$$C - 25 \geq \frac{1{,}75 + 2{,}5C}{5}$$

$$C - 25 \geq \frac{1{,}75}{5} + \frac{2{,}5C}{5}$$

$$C - \frac{2{,}5C}{5} \geq \frac{1{,}75}{5} + 25$$

$$C\left(1 - \frac{2{,}5}{5}\right) \geq 25{,}35$$

$$C(0{,}50) \geq 25{,}35$$

$$C \geq \frac{25{,}35}{0{,}50}$$

$$C \geq 50{,}70$$

El costo mínimo para la compañía será de al menos Bs 50,70.

Ejercicio 2

Determine la Ganancia máxima P (en bolivianos) dado que:

$$6(P-2500) \leq 4(P+2400)$$

Solución:

$$6(P-2500) \leq 4(P+2400)$$

$$P-2500 \leq \frac{4}{6}(P+2400)$$

$$P-2500 \leq \frac{2}{3}P+\frac{2}{3}\cdot 2400$$

$$P-\frac{2}{3}P \leq 1600+2500$$

$$P\left(1-\frac{2}{3}\right) \leq 1600+2500$$

$$P\left(\frac{1}{3}\right) \leq 4100$$

$$P \leq 4100\cdot 3$$

$$P \leq 12300$$

La ganancia máxima que podrá obtener la compañía es de Bs 12300.

Ejercicio 3

Determine el costo mínimo C (en bolivianos) dado que:

$$2(1{,}5C+80)\le 2(2{,}5C-20)$$

Solución:

$2(1{,}5C+80)\le 2(2{,}5C-20)$

$1{,}5C+80\le 2{,}5C-20$

$1{,}5C-2{,}5C\le -20-80$

$1{,}5C-2{,}5C\le -20-80$

$-C\le -100 \quad (-1)$

$$C\ge 100$$

El costo mínimo para la compañía será de al menos Bs 100.

Ejercicio 4

Determine la ganancia máxima P (bolivianos) dado que:

$$12(2P-320)\le 4(3P+240)$$

Solución:

$(2P-320)\le \dfrac{4}{12}(3P+240)$

$2P-320\le \dfrac{1}{3}(3P+240)$

$2P-320\le \dfrac{1}{3}\cdot 3P+\dfrac{1}{3}\cdot 240$

$$2P - 320 \leq P + 80$$

$$2P - P \leq 80 + 320$$

$$P \leq 400$$

La ganancia máxima que podrá obtener la compañía es de Bs 400.

Ejercicio 5

La compañía Davis fabrica un producto que tiene un precio unitario de venta de Bs 20 y un costo unitario de Bs 15. Si los costos fijos son de Bs 600, determine el número mínimo de unidades que deben ser vendidos para que la compañía tenga utilidades.

Solución:

Sea $\mathbf{x}$: unidades
Precio unitario $= 15$
Costos fijos $= 600$

Para que la compañía obtenga al menos utilidad debe cumplirse la siguiente condición.

$$Ingreso\ Total - Costo\ Total \geq 0$$

$$P \cdot x - (Costos\ fijos + Costos\ variables) \geq 0$$

$$20x - (15x + 600) \geq 0$$

$$20x - 15x - 600 \geq 0$$

$$5x \geq 600$$

$$x \geq 120$$

Para que la compañía obtenga utilidades debe vender al menos 120 unidades

Ejercicio 6

El Administrador de una fábrica debe decidir si deberán producir sus propios empaques, que la empresa ha estado adquiriendo de proveedores externos a Bs 1,10 cada uno. La fabricación de los empaques incrementará los costos generales de la empresa en Bs 800 al mes y el costo del material y de mano de obra será de Bs 0,60 por cada empaque ¿Cuántos empaques deberá usar la empresa al mes para justificar la decisión de fabricar sus propios empaques?

Solución:

1 paso Analizar lo que me pide el Ejercicio

Me pide que justifiquemos la decisión de fabricar nuestros propios empaques versus comprarlos de proveedores externos.

2 Paso traducir las condiciones del Ejercicio en términos matemáticos

Sea **x** : Cantidad de empaque

$$Costo\ de\ fabricar < Costo\ de\ adquirirlo$$

- **Costo de fabricarlos** = Costos Variables + Costos Fijos

Costo de fabricarlos = (Costo del material y de mano de obra) + (Costos generales)

Costo de fabricarlos $= 0{,}60\,x + 800$

- **Costo de adquirirlos** $= 1{,}10\,x$

$$0{,}60\,x + 800 < 1{,}10\,x$$

$$0{,}60\,x - 1{,}10\,x < -800$$

$$-0{,}50\,x < -800 \qquad (-1)$$

$$0{,}50\,x > 800$$

$$x > \frac{800}{0{,}50}$$

$$x > 1600$$

El administrador de la compañía para justificar la decisión de fabricar sus propios empaques debe fabricar de al menos 1601.

Ejercicio 7

Una mujer de negocio quiere determinar la diferencia entre los costos de comprar y rentar un automóvil. Ella puede rentar un automóvil por Bs 400 mensual (con una base anual), bajo este plan el costo por milla (gasolina y aceite) es de Bs 0,10. Si comprase el carro, el gasto fijo anual sería de Bs 3000 más Bs 0,18 por milla ¿Cuál es el menor número de millas que deberá conducir por año para que la renta no sea más cara que la compra?

Solución:

1 paso Analizar lo que me pide el Ejercicio

Me pide que encuentre el número de millas que debe conducir por año para justificar que la renta no sea más cara que la compra

2 Paso traducir las condiciones del Ejercicio en términos matemáticos

Sea x : Numero de millas

$$Costo\ de\ rentar\ el\ auto\ < Costo\ de\ comprar\ el\ auto$$

- **Costo de rentar el auto** $= 400\ (mes)\ + 0{,}10\ x$

Costo de rentar el auto $= \ 4800\ (Año)\ + 0{,}10\ x$

- Costo de comprar el auto

Costo de comprar el auto $= \ 3000(Año)\ +\ 0{,}18\ x$

$$Costo\ de\ rentar\ el\ auto\ < Costo\ de\ comprar\ el\ auto$$

$$4800\ (Año)\ + 0{,}10\ x\ < 3000(Año)\ +\ 0{,}18\ x$$

$$4800\ \ + 0{,}10\ x\ < 3000\ +\ 0{,}18\ x$$

$$-\ 0{,}18\ x\ + 0{,}10\ x\ < 3000 -\ 4800$$

$$-\ 0{,}08x\ <\ 1800\quad (-1)$$

$$0{,}08x\ >\ 1800$$

$$x\ >\ \frac{1800}{0{,}08}$$

$$x\ >\ 22500$$

La mujer de negocio para justificar su decisión de rentar el automóvil versus comprar el automóvil debe recorrer al menos 22501 millas al año.

Ejercicio 8

Un fabricante puede vender todas las unidades que produce al precio de Bs 30 cada una. Tiene costos fijos de Bs 12000 al mes; además, le cuesta Bs 22 producir un artículo ¿Cuántas unidades debe producir y vender al mes la compañía para obtener utilidades?

Solución:

Sea **x** *: unidades debe producir y vender (mes)*
Precio unitario = 30
Costos fijos = 12000
Costo variable=22

Para que la compañía obtenga al menos utilidad debe cumplirse la siguiente condición.

$$Ingreso\ Total - Costo\ Total > 0$$

$$(P \cdot x) - (Costos\ fijos + Costos\ variables) > 0$$

$$(30 \cdot x) - (12000 + 22x) > 0$$

$$30 \cdot x - 12000 - 22x > 0$$

$$8x > 12000$$

$$x > \frac{12000}{8}$$

$$x > 1500$$

El fabricante debe producir al menos 1501 artículos para obtener utilidades.

Ejercicio 9

La comisión mensual de un agente de ventas es de 15% de las ventas por arriba de Bs 12000. Si su objetivo es lograr una comisión de al menos Bs 3000 por mes ¿Cuál es el volumen mínimo de ventas que debe alcanzar?

Solución:

1 paso Analizar lo que me pide el Ejercicio

Calcular el Volumen mínimo de ventas que debe alcanzar para logras ganar al menos 3000 Bs al mes.

2 Paso traducir las condiciones del Ejercicio en términos matemáticos

Sea **x** :Volumen mínimo de Ventas

Comisión $=(x - 12000) \cdot 15\%$

$$Comision\ del\ agente \geq 3000$$

$$(x - 12000) \cdot 15\% \geq 3000$$

$$(x - 12000) \geq \frac{3000}{0{,}15}$$

$$x - 12000 \geq 20000$$

$$x \geq 20000 + 12000$$

$$x \geq 32000$$

El volumen de ventas que debe alcanzar el agente es de al menos de 32000 Bs para así obtener una comisión de Bs 3000.

Ejercicio 10

El costo unitario de publicidad de una revista es de Bs 0,65. Se vende al distribuidor en Bs 0,60 cada una y la cantidad que recibe por publicidad es el 10% de la recibida por todas las revistas vendidas arriba de las 10000. Encuentre el menor números de revistas que pueden ser publicadas sin perdida, esto es , que la utilidad ≥ 0 (suponga que toda la emisión será vendida).

Solución:

1 paso Analizar lo que me pide el Ejercicio

Encontrar el menor número de revistas que pueden ser publicada sin perdida.

2 Paso traducir las condiciones del Ejercicio en términos matemáticos

Sea **x** : número de revistas

Ingreso por distribución $= 0{,}60\,x$

Ingreso por publicidad $= 0{,}60(x - 10000) \cdot 10\%$

Costo unitario $=0.65\ x$

$$Ingreso\ por\ distribucion + Ingreso\ por\ publicidad - Costo\ Total \geq 0$$

$$0{,}60\ x + 0{,}60(x - 10000) \cdot 10\% - 0.65\ x \geq 0$$

$$0{,}60\ x + 0{,}06x - 600 - 0.65\ x \geq 0$$

$$0.01\ x \geq 600$$

$$x \geq 60000$$

El número de revista que debe venderse es de al menos 60000 unidades para obtener utilidad.

Ejercicio 11

Una empresa automotriz desea saber si le conviene fabricar sus propias correas para el ventilador, que ha estado adquiriendo de proveedores externos a Bs 2,50 cada unidad. La fabricación de las correas por la empresa incrementara sus costos fijos en Bs 1500 al mes, pero solo le costara Bs 1,70 fabricar cada correa.

¿Cuántas correas debe utilizar la empresa cada mes para justificar la fabricación de sus propias correas?

Solución:

1 paso Analizar lo que me pide el Ejercicio

Me pide que calcule cuantas correas debo fabricar para justificar que es mejor fabricarlas que comprarlas.

2 Paso traducir las condiciones del Ejercicio en términos matemáticos

Sea **x** : Numero de correas

$$Costo\ de\ fabricarlo\ < Costo\ de\ comprar$$

$\boldsymbol{Costo\ de\ fabricar} = Costos\ fijos + Costos\ variables$

Costo de fabricar $= 1500\ +\ 1{,}70\,x$

Costo de Comprar $=\ 2{,}50\,x$

$$15000\ +\ 1{,}70\,x\ < 2{,}50\,x$$

$$-2{,}50\,x\ +\ 1{,}70\,x\ < -1500$$

$$-0{,}8\,x\ < -1500\quad (-1)$$

$$0{,}8\,x\ > 1500$$

$$x\ > 1875$$

La empresa para justificar la decisión de fabricar sus correas debe producir al menos 1876 unidades.

Ejercicio 12

Una Compañía invierte Bs 30000 de sus fondos excedentes a dos tasas de interés anual: 5 y 6,75%. Desea una ganancia anual que no sea menor al 6,50% ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que debe invertir a la tasa de 6,75 por ciento?

Solución:

1 paso Analizar lo que me pide el Ejercicio

La menor cantidad de dinero que debe invertir a la tasa 6,75%

2 Paso traducir las condiciones del Ejercicio en términos matemáticos

Sea **x** : La menor cantidad a la tasa 6,75%

$$x + y = 30000$$

Ganancia anual $= 30000 \text{ } al \text{ } 6{,}50\% \ = \ 30000 \cdot 6{,}50\% \ = 1950$

$$inversion \text{ } al \text{ } 5\% + inversion \text{ } al \text{ } 6{,}75\% \geq 1950$$

$$y \cdot 5\% + x \cdot 6{,}75\% \geq 1950$$

$$(30000 - x) \ \cdot 5\% + x \ \cdot 6{,}75\% \geq 1950$$

$$1500 - 0{,}05 \cdot x + 0{,}0675 \cdot x \geq 1950$$

$$0{,}0175x \geq 450$$

$$x \geq 25714{,}29$$

La menor cantidad que la compañía debe invertir a la tasa 6,75% es de 25714,29.

Ejercicio 13

El costo de publicar cada ejemplar de la revista semanal compra y venta es de Bs 0,35. Los ingresos del representante de ventas son de Bs 0,30 por ejemplar y los ingresos de la publicidad corresponden al 20% de los ingresos obtenidos por ventas que exceden los 2000 ejemplares ¿Cuántas copias deberá publicar y vender cada semana para obtener ingresos semanales de al menos Bs 1000?

Solución:

Sea $\mathbf{x}$: número de revistas a publicar y vender

Ingreso por representante $=0{,}30\,x$

Ingreso por publicidad $=0{,}30(x-2000)\cdot 20\%$

Costo unitario$=0{,}35\,x$

$$Ingreso\ por\ distribucion + Ingreso\ por\ publicidad - Costo\ Total \geq 1000$$

$$0{,}30\,x + 0{,}30(x-2000)\cdot 20\% - 0{,}35\,x \geq 1000$$

$$0{,}30\,x + 0{,}06x - 120 - 0{,}35\,x \geq 1000$$

$$0{,}01x \geq 1000 + 120$$

$$0{,}01x \geq 1120$$

$$x \geq \frac{1120}{0{,}01}$$

$$x \geq 112000$$

La compañía debe publicar y vender al menos 112000 revistas semanales para obtener una utilidad de al menos Bs 1000.

Ejercicio 14

Un fabricante tiene 2500 unidades de un producto cuyo precio unitario es de Bs 4. El próximo mes el precio por unidad se incrementará en Bs 0,50. El fabricante quiere que el ingreso total recibido por la venta de las 25000 unidades no sea menor que Bs 10750 ¿Cuál es número máximo de unidades que puede ser vendido este mes?

Solución:

	Mes	Mes Próximo
Precio	4	(4+0,50)
Cantidad	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$

$$x + y = 2500$$

$$y = 2500 - x \quad \ldots\ldots \ (1)$$

Condición del Ejercicio

$$Venta\ mes + Venta\ próximo\ mes \geq 10750$$

$$P_1 \cdot x + P_2 \cdot y \geq 10750$$

$$4 \cdot x + 4{,}50 \cdot y \geq 10750$$

de (1)

$$4 \cdot x + 4{,}50 \cdot (2500 - x) \geq 10750$$

$$4 \cdot x + 11250 - 4{,}50x \geq 10750$$

$$-0{,}50x \geq 10750 - 11250$$

$$-0{,}50x \geq -500 \quad (-1)$$

$$x \leq 1000$$

El número máximo que puede vender este mes es de 1000 unidades

Ejercicio 15

Un Peluquero atiende en promedio a 120 clientes a la semana cobrándoles Bs 4 por corte por cada incremento de Bs 0,50 en el precio, el peluquero pierde 8 clientes. ¿Qué precio máximo deberá fijar para obtener ingresos semanales por lo menos Bs 520?

Solución:

Sea x: el número de veces que incrementa el precio por encima de 4

Promedio clientes = 120

Cobra = 4

Lo que quiero cobrar = Bs $(4 + 0{,}50x)$

Número de clientes con el incremento $=(100 - 10x)$

$$Ingreso\ total\ a\ la\ semana\ =\ precio\ *\ cantidad$$

Ingreso total $=(4 + 0{,}50x) \cdot (120 - 8x)$

Condición del Ejercicio

$$Ingreso\ total \geq 520$$

$$(4 + 0{,}50x) \cdot (120 - 8x) \geq 520$$

$$480 + 60x - 32x - 4x^2 - 520 \geq 0$$

$$-4x^2 + 28x - 40 \geq 0 \quad (-1)$$

$$4x^2 - 28x + 40 \leq 0 \quad (1/4)$$

$$x^2 - 7x + 10 \leq 0$$

$$(x - 5) \cdot (x - 2) \leq 0$$

El máximo precio que puede subir el peluquero es de $(4 + 0{,}50 \cdot 5) = 6{,}50$ para obtener una utilidad de al menos Bs 520.

Ejercicio 16

Un accionista invierte Bs 100 a un interés anual de R por ciento y otros Bs 100 al 2R por ciento anual. Si el valor de las dos inversiones deber ser de al menos Bs 224,80 después de 2 años ¿Qué restricciones deben establecerse sobre R?

Solución:

	Inversión 1	Inversión 2
Tasa Interés	R	$2R$
Cantidad	100	100

Condición del Ejercicio

$$Inversión\ 1 + Inversión\ 2 \geq 224{,}80$$

	Inversión 1
Interés	$100R$
Cantidad	100
Total	$100 + 100R$
1 Año	$100(1 + R)$

	Inversión 1
Interés	$100(1 + R) \cdot R$
Cantidad	$100(1 + R)$
Total	$100(1 + R) + 100(1 + R) \cdot R$
	$100(1 + R) \cdot (1 + R)$
Total 2 año	$\mathbf{100(1 + R)^2}$

	Inversión 2
Interés	$100 \cdot 2R$
Cantidad	100
Total	$100 + 100 \cdot 2R$
1 Año	$100(1 + 2R)$

	Inversión 2
Interés	$100(1 + 2R) \cdot R$
Cantidad	$100(1 + 2R)$
Total	$100(1 + 2R) + 100(1 + 2R) \cdot R$
	$100(1 + 2R) \cdot (1 + 2R)$
Total 2 año	$\mathbf{100(1 + 2R)^2}$

$$Inversión\ 1 + Inversión\ 2 \geq 224{,}80$$

$$100(1 + R)^2 + 100(1 + 2R)^2 \geq 224{,}80$$

$$100[(1 + R)^2 + (1 + 2R)^2] \geq 224{,}80$$

$$(1 + R)^2 + (1 + 2R)^2 \geq \frac{224{,}80}{100}$$

$$1 + 2R + R^2 + 1 + 4R + 4R^2 \geq \frac{224{,}80}{100}$$

$$5R^2 + 6R + 2 \geq 2{,}248$$

$$5R^2 + 6R + 2 - 2{,}245 \geq 0$$

$$5R^2 + 6R - 0{,}245 \geq 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{6^2 - 4 \cdot 5(-0{,}245)}}{2 \cdot 5} = \frac{-6 + \sqrt{36 + 4{,}9}}{10}$$

$$\boldsymbol{x_1 = 0,04}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-6 - \sqrt{6^2 - 4 \cdot 5(-0{,}245)}}{2 \cdot 5} = \frac{-6 - \sqrt{36 + 4{,}9}}{10}$$

$x_2 = -1{,}24$

(desechamos esta solución porque no existe tasa de interés negativo)

El accionista debe poner una restricción a su tasa de interés

$x \geq 4\%$

Ejercicio 17

Para producir 1 unidad de un producto nuevo, una compañía determina que el costo del material es de Bs 2,50 y el de mano de obra de Bs 4. El gasto general, sin importar el volumen de ventas, es de Bs 5000. Si el precio para un mayorista es de Bs 7,40 por unidad, determine el número mínimo de unidades que debe ser vendido para que la compañía obtenga utilidades.

Solución:

Sea $\boldsymbol{x}$: número de unidades

$$Costo\ Total = Costo\ del\ material + Mano\ de\ obra + Costo\ fijo$$

Costo del material $= 2{,}50x$

Mano de obra $= 4x$

Costo fijo $= 5000$

$$Ingreso\ Total = precio \cdot cantidad$$

Precio de venta $= 7{,}40$

$$Ingreso\ total - costo\ total > 0$$

$$precio \cdot cantidad - (CM + MO + CF) > 0$$

$$7{,}40x - (2{,}50x + 4x + 5000) > 0$$

$$7{,}40x - 2{,}50x - 4x - 5000 > 0$$

$$0{,}90x > 5000$$

$$x > \frac{5000}{0,90}$$

$$x > 5555,56$$

La compañía para obtener al menos utilidades debe producir al menos 5556 unidades.

Ejercicio 18

Un editor puede vender 12000 ejemplares de un libro al precio de Bs 25 cada uno, por cada boliviano de incremento en el precio, las ventas bajan en 400 ejemplares ¿Qué precio mínimo deberá fijarse a cada ejemplar con objetivo de lograr ingresar por lo menos de Bs 300000?

Solución:

$q = 12000$

$P = 25$

Según la condición

Sea $\mathbf{x}$: el número de veces que subirá el precio en 1 Bs

$P = 25 + x$

$q = (12000 - 400 \cdot x)$

$$IT \geq 300000$$

$$P \cdot q \geq 300000$$

$$(25 + x) \cdot (12000 - 400x) \geq 300000$$

$$300000 + 12000x - 10000x - 400x^2 \geq 300000$$

$$2000x - 400x^2 \geq 300000 - 300000$$

$$2000x - 400x^2 \geq 0 \quad \ldots\left(-\frac{1}{400}\right)$$

$$x^2 - 5x \leq 0$$

$$x \cdot (x - 5) \leq 0$$

El precio mínimo que puede fijar la compañía es de

$P = 25 + 5 = 30$

para obtener un ingreso de al menos 300000.

Ejercicio 19

Una fabricante de camisetas produce N camisetas a un costo de mano de obra total de Bs 1,2N y un costo total por material de Bs 0,30N. Los gastos generales para la planta son Bs 6000. Si cada camiseta se vende en Bs 3 ¿Cuántas camisetas deben venderse para que la compañía obtenga utilidades?

Solución:

Sea N: número de camisetas

$$Costo\ total = Mano\ de\ obra\ +\ Costo\ Material + Costo\ Fijo$$

Costo de mano de obra = 1,2N

Costo total por material = 0,30N

Costos fijos = 6000

$$Ingreso\ Total = Precio \cdot Cantidad$$

Precio de venta = 3

$$Ingreso\ Total - \ Costo\ Total\ >\ 0$$

$$P \cdot N - (Mano\ de\ obra\ +\ Costo\ Material + Costo\ Fijo)\ >\ 0$$

$$3 \cdot N - (1{,}2N\ +\ 0{,}30N + 6000)\ >\ 0$$

$$3N - 1{,}2N -\ 0{,}30N - 6000\ >\ 0$$

$$1{,}5N\ - 6000\ >\ 0$$

$$1{,}5N\ \ >\ 6000$$

$$N\ \ >\ 4000$$

El fabricante de camiseta debe producir al menos 4001 unidades para obtener al menos utilidades.

Ejercicio 20

Suponga que los consumidores compraran q unidades de un producto al precio de $\frac{100}{q}+1$ Bolivianos por unidad ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe ser vendido para que el ingreso por ventas sea mayor que Bs 5000?

Solución:

Sea **q**: unidades del producto

Precio $=\frac{100}{q}+1$

Condición del Ejercicio

$$IT > 5000$$

$$p \cdot q > 5000$$

$$\left(\frac{100}{q}+1\right) \cdot q > 5000$$

$$\frac{100}{q} \cdot q + q > 5000$$

$$100 + q > 5000$$

$$q > 5000 - 100$$

$$q > 4900$$

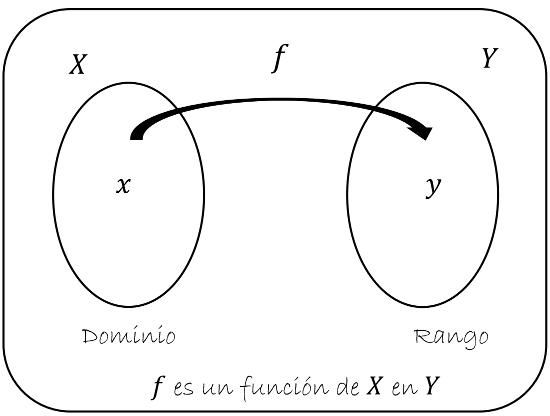
El número de unidades que debe vender la compañía es de al menos 4901 unidades para tener un ingreso de ventas mayor a 5000.

6.-Funciones

Una función $\boldsymbol{f}$ es una relación entre dos conjuntos, un conjunto de partida $\boldsymbol{x}$, llamado dominio y otro de llegada y , llamando rango, que se define por una ley o regla de correspondencia que asigna a cada elemento $\boldsymbol{x} \in X$ un único elemento $\boldsymbol{y} \in Y$.

Simbólicamente

$$f: X \to Y \Leftrightarrow \forall\, x \in X\, \exists\, y \in Y/(x, y) \in f$$



"No existe dos pares con el mismo primer componente"

Si: $(x, y) \in f$ decimos que y es la imagen de x

$y = f_{(x)}$ (notación funcional)

El Dominio, la función debe estar expresada en la forma explícita

El Rango, se debe despejar la variable independiente

Se debe evitar:

a) La división entre cero
b) Raíz de índice par y radicando negativo
c) Logaritmos de números negativos o cero

7.- Aplicaciones de las funciones en las ciencias económicas y Empresariales

La función en términos económicos ase referencia:

Los **modelos matemáticos** son utilizados para analizar la relación entre dos o más variables. Pueden ser utilizados para entender fenómenos naturales, sociales, físicos, etc. Dependiendo del objetivo buscado y del diseño del mismo modelo pueden servir para predecir el valor de las variables en el futuro, hacer hipótesis, evaluar los efectos de una determinada política o actividad, entre otros objetivos.

Aunque parezca un concepto teórico, en realidad hay muchos aspectos de la vida cotidiana regidos por modelos matemáticos.

Observemos las siguientes expresiones:

a) Un empresario desea conocer la relación entre la ganancia de su compañía y su nivel de producción
b) Una empresa desea conocer si es más factible alquilar una maquinaria y comprar la maquinaria
c) Un empresario desea saber el precio máximo que puede ofrecer su producto sin perder el margen de ganancia que posee.

Para poder responder estas interrogantes el primer paso será responder la pregunta ¿Cómo depende una cantidad de otra?

Esta dependencia entre dos cantidades se describe convenientemente en matemáticas mediante una función; por lo tanto, una función es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento de un conjunto A un solo elemento de un conjunto B

7.1.-Funciones de Costos, Ingresos y Ganancia

7.1.1 Función Costo

Dentro la estructura de una empresa al producir un producto, se tiene dos tipos costos, los costos fijos y los costos variables

Costos fijos: Son aquellos que siempre deberás pagar, independiente del nivel de producción de tu negocio o emprendimiento. Ejemplos:

1) Impuestos inmobiliarios.
2) Servicios públicos (luz, gas, agua).
3) Alquiler de los inmuebles (oficinas, depósitos).
4) Seguros.
5) Materiales de oficina.
6) Servicio de internet.
7) Mano de obra indirecta.
8) Personal de vigilancia.
9) Gastos de administración.
10) Transporte.
11) Tributos (licencias, tasas municipales).

Costos variables: Son aquellos costos que varían de acuerdo con la producción que se desarrolla en una empresa. Ejemplos:

1) Materia prima directa.
2) Insumos directos.
3) Materiales generales.
4) Comisiones sobre ventas.
5) Envases y embalajes.
6) Combustible y recursos energéticos.
7) Costos de distribución.

$$Costo\ total\ =\ Costos\ Variables\ +\ Costos\ Fijos$$

7.1.2 Función Ingreso

El ingreso que resulta de una o más transacciones comerciales es el pago total recibido, y a veces se la llama ingreso bruto. Ingreso total es el ingreso por vender $\boldsymbol{x}$ artículos al precio de $\boldsymbol{p}$ cada uno.

$$Ingreso\ total\ =\ Precio\ \cdot Cantidad$$

7.1.3 Función Ganancia (Utilidad)

La **ganancia** es el ingreso *neto,* o lo que queda de los ingresos después de restar los costos.

$$G_{(x)} = IT_{(x)} - C_{(x)}$$

Ejercicio 21

Suponga que la venta esperada (en miles de bolivianos) de una pequeña compañía para los próximos diez años esta aproximada por la función $f_{(x)} = 0{,}08x^4 - 0{,}04x^3 + x^2 + 9x + 50$

a) ¿Cuál es la venta esperada este año?
b) ¿Cuál será la venta en tres años?

Solución:

Venta esperada este año

$x = 1$

$f_{(x)} = 0{,}08x^4 - 0{,}04x^3 + x^2 + 9x + 50$

$$f_{(1)} = 0{,}08 \cdot 1^4 - 0{,}04 \cdot 1^3 + 1^2 + 9 \cdot 1 + 50$$

$$f_{(1)} = 60{,}40$$

Las ventas esperadas por este año es de Bs 60400

Venta esperada en tres años

$x = 3$

$f_{(x)} = 0{,}08x^4 - 0{,}04x^3 + x^2 + 9x + 50$

$$f_{(3)} = 0{,}08 \cdot 3^4 - 0{,}04 \cdot 3^3 + 3^2 + 9 \cdot 3 + 50$$

$$f_{(3)} = 91{,}40$$

Las ventas esperadas por el 3 año es de Bs 91400.

Ejercicio 22

Una contratista estima que el costo total de construir x grupos de departamentos en un año esta aproximado por $f_{(x)} = x^2 + 80x + 60$, donde $f_{(x)}$ representa el costo en cientos de miles de bolivianos. Encuentre el costo de construir.

a) 4 grupos
b) 10 grupos

Solución:

El costo de construir 4 grupos

$x = 4$

$f_{(x)} = x^2 + 80x + 60$

$f_{(4)} = 4^2 + 80 \cdot 4 + 60$

$f_{(4)} = 396$

El costo de construír 4 grupos de departamentos es de Bs 39 600 000

El costo de construír 10 grupos

$x = 10$

$f_{(x)} = x^2 + 80x + 60$

$f_{(10)} = 10^2 + 80 \cdot 10 + 60$

$f_{(4)} = 960$

El costo de construír 10 grupos de departamentos es de Bs 96 000 000

Ejercicio 23

En cierto estado, el impuesto T sobre la cantidad de artículos es de 6% sobre el valor de los artículos adquiridos "$\boldsymbol{x}$", donde T y $\boldsymbol{x}$ se miden en bolivianos.

a) Exprese T como función de x
b) Determine $T_{(200)}$ y $T_{(5,65)}$

Solución:

La expresión matemática que expresa la condición del Ejercicio será

Sea $\boldsymbol{x}$: número de artículos adquiridos

$T \rightarrow x$

$$T_{(x)} = 0{,}06 \cdot x$$

Sea $T = 200$

$$T_{(12)} = 0{,}06 \cdot 200$$

$$T_{(12)} = 12$$

El impuesto que tendría que pagar por 200 artículos es de Bs 12

Sea $T = 800$

$$T_{(800)} = 0{,}06 \cdot 800$$

$$T_{(800)} = 48$$

El impuesto que tendría que pagar por 800 artículos es de Bs 48

Ejercicio 24

Según las fuentes de la industria el ingreso correspondiente a la industria de ventas a domicilio durante los años posteriores a su introducción se puede aproximar mediante la función

$$R_{(x)} = \begin{cases} -0{,}03x^3 + 0{,}25x^2 - 0{,}12x & si\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0{,}57x - 0{,}63 & si\ 3 < x \leq 11 \end{cases}$$ donde $R_{(x)}$

mide el ingreso de miles de millones de bolivianos y $\boldsymbol{t}$ se mide en años $\boldsymbol{t = 0}$ correspondiente al inicio de 1984 ¿cuál fue el ingreso al inicio de 1984 y 1993?

Solución:

El ingreso en 1984

Sea $\boldsymbol{x} = 1$

$$R_{(x)} = \begin{cases} -0{,}03x^3 + 0{,}25x^2 - 0{,}12x & si\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0{,}57x - 0{,}63 & si\ 3 < x \leq 11 \end{cases}$$

El valor de $\boldsymbol{x}$ corresponde a la primera condición entonces

$$R_{(x)} = -0{,}03x^3 + 0{,}25x^2 - 0{,}12x \quad si\ 0 \leq x \leq 3$$

$$R_{(1)} = -0{,}03 \cdot 1^3 + 0{,}25 \cdot 1^2 - 0{,}12 \cdot 1$$

$$R_{(1)} = 0{,}1$$

El ingreso correspondiente el año de 1984 haciende a la suma 0,10 mil millones

El ingreso en 1993

Sea $x = 9$

El valor de x corresponde a la segunda condición entonces

$R_{(x)} = 0{,}57x - 0{,}63 \qquad si\ 3 < x \leq 11$

$R_{(1)} = 0{,}57 \cdot 9 - 0{,}63 = 4{,}5$

El ingreso correspondiente el año de 1993 haciende a la suma 4,5 mil millones.

Ejercicio 25

filtro bol, fabricante de filtros para agua tiene un costo fijo por Bs 20000, costos de producción de Bs 20 por unidad y un precio de venta unitario de Bs 30 determinar las funciones de costos ingresos y ganancias por filtro bol.

Solución:

La función de costo

$$C_{(x)} = CV + CF$$

$$C_{(x)} = c_u \cdot x + CF$$

$$C_{(x)} = 20 \cdot x + 20000$$

La función de Ingreso

$$IT_{(x)} = P \cdot x$$

$$IT_{(x)} = 30 \cdot x$$

La función ganancia

$$G(x) = IT_{(x)} - C_{(x)}$$

$$G(x) = 30 \cdot x - (20 \cdot x + 20000)$$

$$G(x) = 10x - 20000$$

Ejercicio 26

La electricidad se cobra los consumidores a una tarifa de Bs 10 por unidad para las primeras 50 unidades y a Bs 3 por unidad para cantidades que exceden las 50 unidades. Determinar la función $\boldsymbol{C_{(x)}}$ que da el costo de usar $\boldsymbol{x}$ unidades de electricidad.

Solución:

1 condición

Sea $\boldsymbol{x}$*: número de unidades de electricidad*

Tarifa = 10 Bs

$10x$

2 condición

Tarifa = 3 Bs

$3(x - 50)$

$3x - 150$

$$C_{(x)} = \begin{cases} 10x & si \quad x \leq 50 \\ 3(x-50) & si \quad x > 50 \end{cases}$$

Ejercicio 27

Una empresa que fabrica radiorreceptores tienen costos fijos de Bs 3000 y el costo de la mano de obra y del material es de Bs 15 por radio. Determine la función de costo, el costo total como una función del número de radios producidos si cada radio receptor se vende por Bs 25, encuentre la función de costo, ingresos y de utilidad.

Solución:

$Costo\ fijo = 3000$

$Costo\ de\ mano\ obra\ y\ del\ material = 15$

$Precio = Bs\ 25$

La función de costo

$$C_{(x)} = CV + CF$$

$$C_{(x)} = c_u \cdot x + CF$$

$$C_{(x)} = 15x + 3000$$

La función de Ingreso

$$IT_{(x)} = P \cdot x$$

$$IT_{(x)} = 25 \cdot x$$

La función utilidad

$$U(x) = IT_{(x)} - C_{(x)}$$

$$U(x) = 25x - (15x + 3000)$$

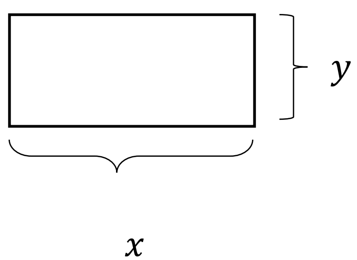
$$U(x) = 25x - 15x - 3000$$

$$U(x) = 10x - 3000$$

Ejercicio 28

Un granjero tiene 200 yardas de cerca para delimitar un terreno rectangular exprese el área del terreno con una función de la longitud de uno de sus lados.

Solución:



200 yardas de cerca

$P = 2a + 2b$ $\qquad$ $P = 2x + 2y$

$P = 2(x + y)$ $\qquad$ $200 = 2(x + y)$

$100 = x + y$ $\qquad$ $y = 100 - x$

$A = f(x)$

$A = a \cdot b$

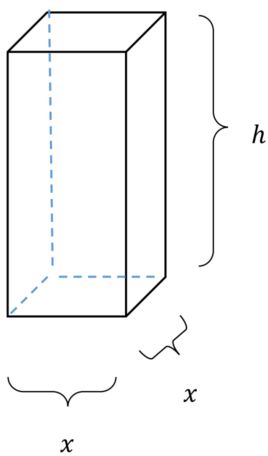
$A = x \cdot y$

$$A = x \cdot (100 - x)$$

Ejercicio 29

Se construye una cisterna de modo que su capacidad sea de 300 pies cúbicos de agua, la cisterna tiene como base un cuadrado y cuatro lados verticales todas hechas de concreto y una tapa cuadrada de acero. Si el concreto con tiene un costo de Bs 1,50 por pie cuadrado y el acero cuesta Bs 4 por pie cuadrado, determine el costo total C como una función de la longitud del lado de la base cuadrada.

Solución:



$$Volumen = xxh = x^2h$$

$$300 = x^2h$$

$$\frac{300}{x^2} = h$$

$$C_{(x)} = precio \cdot base + precio \cdot lados + precio \cdot tapa$$

$$C_{(x)} = 1{,}50x^2 + 1{,}50 \cdot 4xh + 4x^2$$

$$C_{(x)} = 1{,}50x^2 + 1{,}50 \cdot 4x\frac{300}{x^2} + 4x^2$$

$$C_{(x)} = 5{,}5x^2 + 1{,}50 \cdot 4\frac{300}{x}$$

$$C_{(x)} = 5{,}5x^2 + \frac{1800}{x}$$

Ejercicio 30

un fabricante tiene gastos fijos mensuales de Bs 40.000 y un costo unitario de producción de Bs 8. El producto se vende a Bs 12 la unidad.

a) ¿cuál es la función de costó
b) ¿cuál es la función de ingreso?
c) ¿Cuál es la función de ganancia?
d) ¿Calculé la ganancia o pérdida correspondiente a niveles de producción de 8000 a 12000 unidades?

Solución:

La función de costo

$$C_{(x)} = CV + CF$$

$$C_{(x)} = 8x + 40000$$

La función de Ingreso

$$IT_{(x)} = P \cdot x$$

$$IT_{(x)} = 12x$$

La función ganancia

$$G(x) = IT_{(x)} - C_{(x)}$$

$$G(x) = 12x - (8x + 40000)$$

$$G(x) = 4x - 40000$$

$x = 8000$

$G(8000) = 4 \cdot 8000 - 40000 = -8000$

$x = 12000$

$$G(12000) = 4 \cdot 12000 - 40000 = 8000$$

Ejercicio 31

Encuentra el punto de equilibrio por la empresa con función de costó

$C_{(x)} = 5x + 1000$ y función de ingreso $IT_{(x)} = 15x$.

Solución:

$$\text{Punto equilibrio} \quad C_{(x)} = IT_{(x)}$$

$$5x + 1000 = 15x$$

$$-10x = -1000 \ \ (-1)$$

$$x = 100$$

$$P_e(100{,}1500)$$

El punto de equilibrio para que la empresa no gane ni pierda es de 100 unidades.

Ejercicio 32

encuentra el punto de equilibrio para la empresa con función de costó $C_{(x)} = 0{,}2x + 120$ y función ingreso $IT_{(x)} = 0{,}4x$

Solución:

Punto equilibrio $C_{(x)} = IT_{(x)}$

$$0{,}2x + 120 = 0{,}4x$$

$$0{,}2x - 0{,}4x = -120 \quad (-1)$$

$$x = 600$$

$$P_e(600{,}240)$$

El punto de equilibrio para que la empresa no gane ni pierda es de 600 unidades.

Ejercicio 33

encuentre el punto de equilibrio para la empresa como función de costó $C_{(x)} = 150x + 2000$ y función de ingreso $IT_{(x)} = 200x$.

Solución:

Punto equilibrio $C_{(x)} = IT_{(x)}$

$$150x + 2000 = 200x$$

$$150x - 200x = -2000$$

$$-50x = -2000 \quad (-1)$$

$$x = 40$$

$$P_e(40{,}8000)$$

El punto de equilibrio para que la empresa no gane ni pierda es de 40 unidades.

Ejercicio 34

El azúcar tiene un costo de Bs 25 para cantidades hasta 50 libras y de Bs 20 por libras en el caso de cantidades por encima de las 50 libras. Si $\boldsymbol{C_{(x)}}$ denota el costo de $\boldsymbol{x}$ libras de azúcar, exprese $\boldsymbol{C_{(x)}}$ por medio de expresiones algebraicas apropiadas.

Solución:

1 condición

Sea $\mathbf{x}$: número de libras de azúcar

Tarifa = 25 Bs

$25x$

2 condición

Tarifa = 20 Bs

$20(x-50)$

$$C_{(x)} = \begin{cases} 25x & si \quad x \leq 50 \\ 20x - 100 & si \quad x > 50 \end{cases}$$

Ejercicio 35

Auto time fabricante de cronómetros tiene gastos fijos mensuales de Bs 48000 y un costo unitario de producción de Bs 8. Los cronómetros se venden a Bs14 cada uno.

a) ¿Cuál es la función de costó?
b) ¿Cuál es la función de ingreso?
c) ¿Cuál es la función de ganancia?
d) ¿Calcula la ganancia o pérdida correspondiente a niveles de producción de 6000 y 10000 cronómetro respectivamente?

Solución:

La función de costo

$$C_{(x)} = CV + CF$$

$$C_{(x)} = 8x + 48000$$

La función de Ingreso

$$IT_{(x)} = P \cdot x$$

$$IT_{(x)} = 14x$$

La función ganancia

$$G(x) = IT_{(x)} - C_{(x)}$$

$$G(x) = 14x - (8x + 48000)$$

$$G(x) = 6x - 48000$$

$x = 6000$

$$G(6000) = 6 \cdot 6000 - 48000 = -24000$$

$x = 10000$

$$G(10000) = 6 \cdot 10000 - 48000 = 12000$$

Ejercicio 36

Suponga que la ventas de una guitarra eléctrica satisface la relación

$H_{(x)} = 300x + 2000$,donde $H_{(x)}$ representa el número de guitarras vendidas en el año $\boldsymbol{x}$,con $\boldsymbol{x} = 0$ correspondiente al año 1987 .Encuentre las ventas en cada uno de los siguientes años.

a) 1987
b) 1990
c) 1991

Solución:

a)

$\boldsymbol{x = 0}$

$H_{(x)} = 300x + 2000$

$H_{(0)} = 300 \cdot 0 + 2000$

$H_{(0)} = 2000$

b)

$\boldsymbol{x = 3}$

$H_{(x)} = 300x + 2000$

$H_{(1)} = 300 \cdot 3 + 2000$

$H_{(1)} = 2900$

c)

$$\boldsymbol{x = 4}$$

$$H_{(x)} = 300x + 2000$$

$$H_{(4)} = 300 \cdot 4 + 2000$$

$$H_{(4)} = 3200$$

Ejercicio 37

La demanda mensual, $\boldsymbol{x}$, de cierto artículo al precio de P bolivianos por unidad está dada por la relación $\boldsymbol{x = 1350 - 45p}$ el costo de la mano de obra y del material con que se fabrica este producto es de Bs 5 por unidad y el costo fijo es son de Bs 2000 al mes ¿Qué precio por unidad P deberá al consumidor con objeto de obtener una utilidad máxima mensual?

Solución:

Sea $\boldsymbol{x}$: la cantidad de artículo

$$x = 1350 - 45p$$

$$x - 1350 = -45p$$

$$-\frac{x}{45} + \frac{1350}{45} = p$$

$$Ingreso\ Total\ = p \cdot x$$

$$I\,T\ = \left(-\frac{x}{45}+\frac{1350}{45}\right)\cdot x$$

$$I\,T\ = -\frac{x}{45}\cdot x+\frac{1350}{45}\cdot x$$

$$I\,T\ = -\frac{x^2}{45}+30x$$

Costo de mano de obra y del material = Bs 5x

Costo fijo = 2000

$$CT = CV + CF$$

$$CT = 5x + 2000$$

$$IT - CT = UT$$

$$-\frac{x^2}{45}+30x-(5x+2000) = UT$$

$$-\frac{x^2}{45}+30x-5x-2000 = UT$$

$$-\frac{x^2}{45}+25x-2000 = UT\ \ (-1)$$

$$\frac{x^2}{45}-25x+2000 = -UT\ \ \ldots..(45)$$

$$x^2-1125x+90000 = -45UT$$

$$UT = y$$

$$\left(x - \frac{1125}{2}\right)^2 - \frac{1125^2}{2^2} + 90000 = -45y$$

$$\left(x - \frac{1125}{2}\right)^2 - \frac{905625}{4} = -45y$$

$$\left(x - \frac{1125}{2}\right)^2 = \frac{905625}{4} - 45y$$

$$\left(x - \frac{1125}{2}\right)^2 = -45\left(y - \frac{20125}{4}\right)$$

$$V(h,k) = V(562{,}50\ ,\ 5031{,}25)$$

$$P = -\frac{x}{45} + \frac{1350}{45} = \frac{562{,}50}{45} + \frac{1350}{45} = 42{,}50$$

$$P = 42{,}50$$

El precio máximo que debe fijar la compañía es de Bs 42,50 para obtener una utilidad máxima de Bs 5031,25.

2da solución:

$$UT = -\frac{x^2}{45} + 25x - 2000$$

Observamos que es una función cuadrática

$$V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{45}\right)}_{a}x^2 + \underbrace{25}_{b}x - \underbrace{2000}_{c} = UT$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{25}{2 \cdot -\frac{1}{45}} = \frac{25}{\frac{2}{45}} = 562{,}50$$

$$x = 562{,}50$$

$$UT = -\frac{x^2}{45} + 25x - 2000$$

$$UT = -\frac{(562{,}50)^2}{45} + 25 \cdot 562{,}50 - 2000$$

$$UT = 5031{,}25$$

El precio máximo que debe fijar la compañía es de Bs 42,50 para obtener una utilidad máxima de Bs 5031,25.

Ejercicio 38

El ingreso mensual por concepto de la venta de x unidades de cierto artículo está dado por $I_{(x)} = 12x - 0{,}01x^2$ bolivianos .Determine el número de unidades que deben venderse cada mes con el propósito de maximizar el ingreso ¿Cuál es el correspondiente ingreso máximo?

Solución:

$$I_{(x)} = 12x - 0{,}01x^2 \ldots(100)$$

$$100I_{(x)} = 100 \cdot 12x - 0{,}01 \cdot 100x^2$$

$$100 \cdot I_{(x)} = 1200x - x^2$$

$$1200x - x^2 = 100 \cdot I_{(x)} \ ..(-1)$$

$$I_{(x)} = y$$

$$x^2 - 1200x = -100y$$

$$(x-600)^2 - 600^2 = -100y$$

$$(x-600)^2 = -100y + 600^2$$

$$(x-600)^2 = -100(y+3600)$$

$V(h,k) = V(600\ ,\ 3600)$

La cantidad de 600 unidad nos proporciona la utilidad máxima mensual de Bs 3600.

2da solución:

$$I_{(x)} = 12x - 0{,}01x^2$$

Observamos que es una función cuadrática

$$V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

$$\underbrace{(-0{,}01)}_{a}x^2 + \underbrace{12}_{b}x + \underbrace{0}_{c} = I_{(x)}$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \cdot -0{,}01} = 600$$

$$x = 600$$

$$I_{(x)} = 12x - 0{,}01x^2$$

$$I_{(600)} = 12 \cdot 600 - 0{,}01 \cdot 600^2$$

$$I_{(600)} = 3600$$

La cantidad de 600 unidades nos proporciona la utilidad máxima mensual de Bs 3600.

Ejercicio 39

Una empresa tiene un costo fijo mensual de Bs 2000 y el costo variable por unidad de su producto es de Bs 25.

a) ¿Determine la función de costó?

b) El ingreso I obtenido por vender x unidades estado por $I_{(x)} = 60x - 0{,}01x^2$ determina el número de unidades que deben venderse al mes de modo que maximiza el ingreso, ¿Cuál es este ingreso máximo,

c) ¿Cuántas unidades tiene producirse y venderse al mes con el propósito de obtener una utilidad máxima, ¿cuál es la utilidad máxima?

Solución:

a)

$Costo\ fijo = 2000$

$Cv\ = Bs\ 25$

$$C_{(x)} = CV + CF$$

$$C_{(x)} = 25x + 2000$$

b)

$$I_{(x)} = 60x - 0{,}01x^2$$

Observamos que es una función cuadrática

$$V\left(-\frac{b}{2a},f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

$$\underbrace{(-0{,}01)}_{a}x^2+\underbrace{60}_{b}x+\underbrace{0}_{c}=I_{(x)}$$

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{60}{2\cdot -0{,}01}=3000$$

$$x=3000$$

$$I_{(x)}=60x-0{,}01x^2$$

$$I_{(300)}=60\cdot 3000-0{,}01\cdot 3000^2$$

$$I_{(300)}=90000$$

La cantidad de 300 unidad nos proporciona el ingreso máximo mensual de Bs 90 000.

c)

$$U_{(x)}=I_{(x)}-C_{(x)}$$

$$U_{(x)}=60x-0{,}01x^2-(25x+2000)$$

$$U_{(x)}=60x-0{,}01x^2-25x-2000$$

$$U_{(x)}=-0{,}01x^2+35x-2000$$

$$U_{(x)}=-0{,}01x^2+35x-2000\ \ldots(100)$$

$$100\cdot U_{(x)}=-x^2+3500x-200000$$

$$U_{(x)} = y$$

$$100 \cdot y = -x^2 + 3500x - 200000$$

$$x^2 - 3500x + 200000 = 100y$$

$$(x - 1750)^2 - 1750^2 + 200000 = -100y$$

$$(x - 1750)^2 - 2862500 = -100y$$

$$(x - 1750)^2 = -100y + 2862500$$

$$(x - 1750)^2 = -100(y - 28625)$$

$V(h, k) = V(1750\ ,\ 28625)$

La cantidad de 1750 unidades nos proporciona la utilidad máxima de Bs 28625.

Ejercicio 40

El ingreso mensual R obtenido por vender zapatos modelo de lujo es en función de la demanda $\boldsymbol{x}$ del mercado .Obsérvese que ,como una función del precio P por par, el ingreso mensual y la demanda son $I_{(p)} = 300p - 0{,}01p^2$ y $x = 300 - 2p$ ¿Cómo depende $I_{(p)}$ de $\boldsymbol{x}$?

Solución:

$$x = 300 - 2p$$

$$x - 300 = -2p$$

$$\frac{x}{-2} + 150 = p$$

$$P = -\frac{x}{2} + 150$$

$$I_{(x)} = 300\left(-\frac{x}{2} + 150\right) - 0{,}01\left(-\frac{x}{2} + 150\right)^2$$

$$I_{(x)} = -150x + 45000 - \frac{x^2}{2} + 300x - 45000$$

$$I_{(x)} = -\frac{x^2}{2} + 150x$$

Ejercicio 41

El número "y" unidades vendidas cada semana de cierto producto depende de la cantidad de x (en bolivianos) gastado en publicidad y está dado por $y = 70 + 150x - 0{,}3x^2$.¿Cuánto deberían gastar a la semana en publicidad con el objeto de obtener volumen de venta máximos? ¿Cuál es este volumen de ventas máximo?

Solución:

$$y = 70 + 150x - 0{,}3x^2$$

Observamos que es una función cuadrática

$$V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

$$\underbrace{(-0{,}3)}_{a}x^2 + \underbrace{150}_{b}x + \underbrace{70}_{c} = y$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{150}{2 \cdot -0{,}3} = 250$$

$$x = 250$$

$$y = 70 + 150x - 0{,}3x^2$$

$$y = 70 + 150 \cdot 250 - 0{,}3 \cdot 250^2$$

$$y = 18820$$

Lo que debe gastar la compañía es de Bs 250 y el volumen de ventas máximo es de 18820 unidades.

Ejercicio 42

Los costos fijos semanales de una empresa por sus productos son de Bs 200 y el costo variable por unidad es de Bs 0,70. La empresa puede vender $\boldsymbol{x}$ unidades a un precio de "$\boldsymbol{p}$" por unidad en donde

$2p = 5 - 0{,}01x$ ¿Cuántas unidades deberá producirse y venderse a la semana de modo que obtenga?

a) Ingresos máximos.
b) Utilidad máxima

Solución:

a)

Sea x: unidades a venderse

$$2p = 5 - 0{,}01x$$

$$p = \frac{5 - 0{,}01x}{2}$$

$$I_{(x)} = p \cdot x$$

$$I_{(x)} = (\frac{5}{2} - \frac{0{,}01x}{2}) \cdot x$$

$$I_{(x)} = \frac{5}{2}x - \frac{0{,}01x^2}{2}$$

$$V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

$$\underbrace{\left(-\frac{0{,}01}{2}\right)}_{a}x^2 + \underbrace{\frac{5}{2}}_{b}x + \underbrace{0}_{c} = I_{(x)}$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{5}{2}}{2\cdot -\frac{0{,}01}{2}} = 250$$

$$x = 250$$

$$I_{(x)} = \frac{5}{2}x - \frac{0{,}01x^2}{2}$$

$$I_{(250)} = \frac{5}{2}(250) - \frac{0{,}01(250)^2}{2}$$

$$I_{(250)} = 312{,}50$$

La cantidad de 250 unidades máxima los ingresos de la compañía en Bs 312,50.

b)

Costos fijos =2000

Cu = 0,70

$$C_{(x)} = 0,70x + 2000$$

$$I_{(x)} = \frac{5}{2}x - \frac{0,01x^2}{2}$$

$$U_{(x)} = I_{(x)} - C_{(x)}$$

$$U_{(x)} = \frac{5}{2}x - \frac{0,01x^2}{2} - (0,70x + 2000)$$

$$U_{(x)} = \frac{5}{2}x - \frac{0,01x^2}{2} - 0,70x - 2000$$

$$U_{(x)} = -\frac{0,01x^2}{2} + \frac{9}{5}x - 2000$$

$$V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

$$\underbrace{\left(-\frac{0,01}{2}\right)}_{a}x^2 + \underbrace{\frac{9}{5}}_{b}x + \underbrace{-2000}_{c} = I_{(x)}$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{9}{5}}{2 \cdot -\frac{0,01}{2}} = 180$$

$$x = 180$$

La cantidad de 180 unidades nos proporciona la utilidad máxima.

Ejercicio 43

Urubú, un complejo habitacional tiene, 100 departamentos de dos recámaras. La ganancia mensual obtenida por la renta $\boldsymbol{x}$ departamentos está dado $P_{(x)} = -10x^2 + 1760x - 50000$, bolivianos

a) ¿Cuántas unidades deben rentarse para maximizar la ganancia mensual?
b) ¿Cuál es la ganancia mensual que se puede obtener siempre?

Solución:

$$P_{(x)} = -10x^2 + 1760x - 50000$$

$$V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

$$\underbrace{(-10)}_{a}x^2 + \underbrace{1760}_{b}x - \underbrace{50000}_{c} = I_{(x)}$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{1760}{2 \cdot -10} = 88$$

$$x = 88$$

$$P_{(x)} = -10x^2 + 1760x - 50000$$

$$P_{(88)} = -10 \cdot 88^2 + 1760 \cdot 88 - 50000$$

$$P_{(88)} = 27440$$

La cantidad 88 unidades nos proporciona una ganancia máxima de Bs 27440.

Ejercicio 44

La ganancia mensual estimada obtenida por la empresa Canon al producir y vender $\boldsymbol{x}$ unidades de cámaras modelo M1 es

$U_{(x)} = -0{,}04x^2 + 240x - 10000$, bolivianos. Encuentre cuántas cámaras debe producirse cada mes para maximizar sus ganancias

Solución:

$$U_{(x)} = -0{,}04x^2 + 240x - 10000$$

$$U_{(x)} = -0{,}04x^2 + 240x - 10000 \ \ldots (25)$$

$$25 \cdot U_{(x)} = -x^2 + 6000x - 250000$$

$$U_{(x)} = y$$

$$25 \cdot y = -x^2 + 6000x - 250000$$

$$x^2 - 6000x + 250000 = -25y$$

$$(x - 3000)^2 - 3000^2 + 250000 = -25y$$

$$(x - 3000)^2 - 8750000 = -25y$$

$$(x - 3000)^2 = -25y + 8750000$$

$$(x - 3000)^2 = -25(y - 35000)$$

$V(h,k) = V(3000\ ,\ 350000)$

La cantidad de 3000 cámaras modelo M1 nos proporciona la utilidad máxima de Bs 350000.

Ejercicio 45

La relación entre las ganancias trimestrales de ECOBOL, $P_{(X)}$, y la cantidad de dinero $\boldsymbol{x}$ invertido en publicidad por trimestre queda descrita mediante la función

$P_{(x)} = -\frac{1}{8}x^2 + 7x + 30 \quad (0 \le x \le 50)$,donde , $P_{(X)}$, y $\boldsymbol{x}$ se mide en miles de bolivianos. Determine la cantidad de dinero que debe invertir la compañía en publicidad por trimestre para maximizar sus ganancias trimestrales.

Solución:

Sea $\boldsymbol{x}$: el dinero invertido en publicidad

$$P_{(x)} = -\frac{1}{8}x^2 + 7x + 30$$

$$V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{8}\right)}_{a}x^2 + \underbrace{7}_{b}\,x + \underbrace{30}_{c} = P_{(x)}$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2\cdot -\frac{1}{8}} = 88$$

$x = 28$

$$P_{(28)} = -\frac{1}{8}(28)^2 + 7 \cdot 28 + 30$$

$$P_{(28)} = 128$$

La cantidad de dinero invertido es de Bs 28000 que nos proporciona una ganancia máxima de Bs 128000.

Ejercicio 46

El ingreso mensual I (en cientos de bolivianos) obtenido por la venta de rasuradoras electrónica Royal se relaciona con el precio unitario P (en bolivianos) mediante la ecuación $I_{(x)} = -\frac{P^2}{2} + 30p$

¿Cuál es el precio unitario que maximiza el ingreso mensual?

Solución:

$$I_{(p)} = -\frac{p^2}{2} + 30p$$

$$V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{a}p^2 + \underbrace{30}_{b}p + \underbrace{0}_{c} = I_{(p)}$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{30}{2 \cdot -\frac{1}{2}} = 30$$

$$p = 30$$

$$I_{(p)} = -\frac{p^2}{2} + 30p$$

$$I_{(30)} = -\frac{30^2}{2} + 30 \cdot 30$$

$$I_{(30)} = 450$$

El precio máximo es de Bs 30 que nos proporciona un ingreso máximo de Bs 450.

8.- La Derivada

La derivada de una **función matemática** es la razón o velocidad de cambio de una función en un determinado punto. Es decir, qué tan rápido se está produciendo una variación.

Desde una perspectiva geométrica, la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente al punto donde se ubica x.

$$f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h}$$

8.1 Teoremas para derivar funciones sea f , g y h funciones diferenciales.

Para funciones algebraicas

Función a derivar	Derivada de la función
$f_{(x)} = k\,;\ \ k = ctte$	$f'_{(x)} = 0$
$f_{(x)} = k \cdot h_{(x)}\ \ ; k = ctte$	$f'_{(x)} = k \cdot \left[h_{(x)}\right]'$
$f_{(x)} = h_{(x)} + g_{(x)}$	$f'_{(x)} = h'_{(x)} + g'_{(x)}$
$f_{(x)} = h_{(x)} - g_{(x)}$	$f'_{(x)} = h'_{(x)} - g'_{(x)}$
$f_{(x)} = x^n$	$f'_{(x)} = nx^{n-1}$
$f_{(x)} = \left[g_{(x)}\right]^n$	$f'_{(x)} = n\left[g_{(x)}\right]^{n-1} \cdot g'_{(x)}$
$f_{(x)} = h_{(x)} \cdot g_{(x)}$	$f'_{(x)} = h'_{(x)} \cdot g_{(x)} + h_{(x)} \cdot g'_{(x)}$
$f_{(x)} = \dfrac{h_{(x)}}{g_{(x)}}$	$f'_{(x)} = \dfrac{h'_{(x)} \cdot g_{(x)} - h_{(x)} \cdot g'_{(x)}}{\left[g_{(x)}\right]^2}$

Para funciones trigonométricas

Funciones simples		Funciones compuestas	
Función a derivar	Derivada de la función	Función a derivar	Derivada de la función
$f_{(x)} = \sin x$	$f'_{(x)} = \cos x$	$f_{(x)} = \sin u$	$f'_{(x)} = \cos u \cdot u'$
$f_{(x)} = \cos x$	$f'_{(x)} = -\sin x$	$f_{(x)} = \cos x$	$f'_{(x)} = -\sin u \cdot u'$
$f_{(x)} = \operatorname{tg} x$	$f'_{(x)} = sec^2 x$	$f_{(x)} = \operatorname{tg} x$	$f'_{(x)} = sec^2 u \cdot u'$

Para funciones exponenciales y logarítmicas

Funciones simples		Funciones compuestas	
Función a derivar	Derivada de la función	Función a derivar	Derivada de la función
$f_{(x)} = \ln x$	$f'_{(x)} = \frac{1}{x}$	$f_{(x)} = \ln[g_{(x)}]$	$f'_{(x)} = \frac{1}{g_{(x)}} \cdot g'_{(x)}$
$f_{(x)} = a^x$	$f'_{(x)} = a^x \cdot \ln a$	$f_{(x)} = a^{g(x)}$	$f'_{(x)} = a^{g(x)} \cdot \ln a \cdot g'_{(x)}$
$f_{(x)} = e^x$	$f'_{(x)} = e^x$	$f_{(x)} = e^{g(x)}$	$f'_{(x)} = e^{g(x)} \cdot g'_{(x)}$

Ejercicio 47

Una mueblería vende muebles de oficina a 1200 Bs cada una, ofreciendo una rebaja de 10 Bs por cada mueble por encimas de 80 unidades que puede vender. La rebaja afecta a todas las mesas vendidas. Hallar el máximo ingreso bajo este plan de ventas.

Solución:

$p = 1200$

Condición del Ejercicio

$Rebaja = (q - 80) \cdot 10$

$Nuevo\ precio = 1200 - (q - 80) \cdot 10$

$$I_{(q)} = p \cdot q$$

$I_{(q)} = [1200 - (q - 80) \cdot 10] \cdot q$

$I_{(q)} = [1200 - 10q + 800] \cdot q$

$I_{(q)} = [2000 - 10q] \cdot q$

$I_{(q)} = 2000q - 10q^2$

$I'_{(q)} = 2000 - 10 \cdot 2q$

$I'_{(q)} = 2000 - 20q$

$$I'_{(q)} = 0$$

$0 = 2000 - 20q$

$20q = 2000$

$q = \dfrac{2000}{20}$

$$q = 100$$

$$I_{(q)} = 2000q - 10q^2$$

$$I_{(100)} = 2000 \cdot 100 - 10 \cdot 100^2$$

$$I_{(100)} = 100\,000$$

La mueblería para obtener un ingreso máximo de Bs 10000 debe vender 100 muebles de oficina.

Segunda solución:

$$I_{(q)} = 2000q - 10q^2$$

$V\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$

$$I_{(q)} = \underbrace{-10}_{a}\, q^2 + \underbrace{2000}_{b}\, q + \underbrace{0}_{c}$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{200}{2 \cdot -10} = 100$$

$$q = 100$$

$$I_{(100)} = 2000 \cdot 100 - 10 \cdot 100^2 = 100\,000$$

Ejercicio 48

Un monopolista determina que sí $C_{(x)}$ es el costo total de la producción de x unidades de cierta mercancía, entonces $C_{(x)} = 25 \cdot x + 20000$, la ecuación de la demanda es $x + 50 \cdot p = 5000$, donde son demandas x unidades cada semana, cuando el precio unitario es de P centavos, si se desea maximizar la utilidad semana encontrar:

a) El número de unidades que deben producirse cada semana
b) El precio de cada unidad

Solución:

a)

$$C_{(x)} = 25x + 20000$$

$$x + 50p = 5000$$

$$50p = 5000 - x$$

$$p = \frac{5000}{50} - \frac{x}{50}$$

$$p = 100 - \frac{x}{50}$$

$$I_{(x)} = p \cdot x$$

$$I_{(x)} = \left(100 - \frac{x}{50}\right) \cdot x$$

$$I_{(x)} = 100x - \frac{x^2}{50}$$

$$U_{(x)} = I_{(x)} - C_{(x)}$$

$$U_{(x)} = 100x - \frac{x^2}{50} - (25x + 20000)$$

$$U_{(x)} = 100x - \frac{x^2}{50} - 25x - 20000$$

$$U_{(x)} = -\frac{x^2}{50} + 75x - 20000$$

$$U'_{(q)} = -\frac{2x}{50} + 75$$

$$U'_{(q)} = 0$$

$$0 = -\frac{2x}{50} + 75$$

$$\frac{2x}{50} = 75$$

$$\frac{x}{25} = 75$$

$$x = 1875$$

El número de unidades que debe producirse para maximizar la utilidad es de 1875 unidades.

b)

"x " en p

$$p = 100 - \frac{1875}{50} = 62{,}50$$

El precio que máxima la utilidad es de Bs 62,50

Ejercicio 49

Un fabricante puede tener un ingreso de Bs 20 en cada artículo, si se producen semanalmente no más de 800 de artículos. La utilidad decrece a 2 centavos por artículo que sobre pasa los 800. ¿Cuantos artículos deben fabricarse a la semana para obtener un ingreso máximo?

solución:

$$p \;=\; Bs\ 20$$

$$q \;=\; 800$$

Según la condición del Ejercicio

$$q \;=\; 800 + x$$

$$p = 20 - \frac{2}{100}x$$

$$I_{(x)} = p \cdot x$$

$$I_{(x)} = \left(20 - \frac{2}{100}x\right) \cdot (800 + x)$$

$$I_{(x)} = 20 \cdot 800 - \frac{2}{100}x \cdot 800 - \frac{2}{100}x^2 + 20x$$

$$I_{(x)} = 1600 + 20x - \frac{2}{100}x^2 - 16x$$

$$I_{(x)} = -\frac{2}{100}x^2 + 4x + 1600$$

$$I'_{(x)} = -\frac{2}{100} \cdot 2x + 4$$

$$I'_{(x)} = -\frac{4}{100}x + 4$$

$$I'_{(x)} = 0$$

$$0 = -\frac{4}{100}x + 4$$

$$\frac{4}{100}x = 4$$

$$x = 100$$

$$q = 800 + x = 800 + 100 = 900$$

$$q = 900$$

$$I_{(100)} = -\frac{2}{100}(100)^2 + 4 \cdot 100 + 1600$$

$$I_{(100)} = 1800$$

El fabricante debe producir a la semana cantidad de 900 artículos semana para maximizar la utilidad en Bs 1800.

Ejercicio 50

Un fabricante puede producir memorias flash a un costo de Bs 20 cada una. calcular que si las vende a "$\boldsymbol{x}$" bolivianos cada una podrá vender aproximadamente 120- X memorias flash al mes. Determinar el precio de venta de "$\boldsymbol{x}$" que producirá la mayor utilidad para el fabricante.

solución:

$$Cu = 20x$$

$$P = 120 - x$$

$$U_{(x)} = I_{(x)} - C_{(x)}$$

$$U_{(x)} = p \cdot x - C_{(x)}$$

$$U_{(x)} = (120 - x) \cdot x - 20x$$

$$U_{(x)} = 120x - x^2 - 20x$$

$$U_{(x)} = -x^2 + 100x$$

$$U'_{(x)} = -2x + 100$$

$$U'_{(x)} = 0$$

$$0 = -2x + 100$$

$$2x = +100$$

$x = 50$ *en "p"*

$$P = 120 - 50 \qquad P = 70$$

El precio de venta que producirá la mayor utilidad es de Bs 70

Ejercicio 51

Una editorial de revistas vende 10000 revistas semanales cobrando a Bs 50 cada revista, si la librería quiere aumentar las ventas debe rebajar Bs 1 en cada revista para conseguir 1000 compradores más. ¿Cuál debe ser el máximo descuento en el precio de cada revista, para obtener un mayor ingreso?

Solución:

$q = 1000$
$p = Bs\ 50$

Según la condición del Ejercicio la cantidad y el precio

$q = 10000 + 1000x$
$p = 50 - x$

$$I_{(x)} = p \cdot q$$

$I_{(x)} = (50 - x) \cdot (10000 + 1000x)$

$I_{(x)} = 500000 + 50000x - 10000x - 1000x^2$

$$I_{(x)} = 500000 + 40000x - 1000x^2$$

$I'_{(x)} = 40000 - 1000 \cdot 2x$

$$I_{(x)} = 0$$

$0 = 40000 - 2000x$

$2000x = 40000$

$x = 20 \qquad p = 50 - 20 \qquad p = 30$

La editorial de la revista puede hacer un descuento máximo de Bs 20 para obtener un mayor ingreso.

Ejercicio 52

Una empresa de venta de lotes de terreno desea vender en promedio 1000 terrenos al mes a Bs 50000, la empresa piensa que se puede vender 100 terrenos adicionales al mes por cada Bs 2000 de reducción en el precio. ¿Cuál es el precio que produce el mayor ingreso?

Solución:

$q = 1000 + 100x$

$p = 50000 - 2000x$

$$I_{(x)} = p \cdot q$$

$I_{(x)} = (50000 - 2000x) \cdot (1000 + 100x)$

$I_{(x)} = 50000000 + 5000000x - 200000x - 2000000x^2$

$I_{(x)} = 50000000 + 4800000x - 2000000x^2$

$I'_{(x)} = 4800000 - 4000000x$

$$I'_{(x)} = 0$$

$0 = 4800000 - 4000000x$

$4000000x = 4800000$

$$x = 12$$

"x" en p

$p = 50000 - 2000 \cdot 12$

$$p = 26000$$

La empresa de venta de lotes debe ofrecer su terreno al precio Bs 2600 para alcanzar su máximo ingreso.

Ejercicio 53

Suponiendo que la función precio está dado por $p_{(x)} = 40 - 8x$ y la función costo por $C_{(x)} = 4x + 10^{18}$ supóngase además que el gobierno grava las ventas con un impuesto de t% por cada unidad.

a) determinar en términos de t, la cantidad de producción que maximiza la utilidad.
b) determinar también el valor de t que maximiza la renta del gobierno por concepto de impuesto.

Solución:

a)

$$p = 40 - 8x$$

$$C_{(x)} = 4x + 10^{18} + tx$$

$$U_{(x)} = I_{(x)} - C_{(x)}$$

$$U_{(x)} = p \cdot x - C_{(x)}$$

$$U_{(x)} = (40 - 8x) \cdot x - (4x + 10^{18} + tx)$$

$$U_{(x)} = 40x - 8x^2 - 4x - 10^{18} - tx$$

$$U_{(x)} = -8x^2 + 36x - 10^{18} - tx$$

$$U'_{(x)} = -8 \cdot 2x + 36 - t$$

$$U'_{(x)} = 0$$

$0 = -16x + 36 - t$

$16x = 36 - t$

$$x = \frac{36 - t}{16}$$

b)

$$I_{g_{(x)}} = x \cdot t$$

$I_{g_{(x)}} = \left(\frac{36 - t}{16}\right) \cdot t$

$I_{g_{(x)}} = \left(\frac{36t - t^2}{16}\right)$

$I'_{g_{(x)}} = \frac{36 - 2t}{16}$

$$I'_{g_{(x)}} = 0$$

$0 = \frac{36 - 2t}{16}$

$0 = 36 - 2t$

$2t = 36$

$$t = 18\%$$

Ejercicio 54

Un fabricante ha ideado un nuevo diseño para los paneles solares colectores según los estudios de mercadotecnia que se han realizado. La demanda actual de los paneles dependerá del precio al que se venden. La función de su demanda ha sido estimada así: $q = 100000 - 200p$

a) Formular la función utilidad $U = f(q)$ que exprese la utilidad anual U en función del número de unidades "que se producen y venden.
b) Determinar el número de unidades "q" que deberían producirse para maximizar la utilidad anual.
c) Determinar el precio que tendra que cobrarse por cada panel para generar una demanda igual a la respuesta del inciso b)
d) Determinar la máxima utilidad anual.
e) Determinar la función Ingreso total y Costo total
f) Hallar el punto de equilibrio entre el ingreso total y costo total.

Donde "q" es el número de unidades demandadas al año y "p" representa el precio en dólares. Los estudios en ingeniería indican que el costo total de la producción de q paneles está muy bien estimado para por la función $C_{(q)} = 150000 + 100q + 0{,}003q^2$.

Solución:

a)

$$q = 100000 - 200p$$

$$200p = 100000 - q$$

$$p = \frac{100000 - q}{200}$$

$$p = \frac{100000}{200} - \frac{q}{200}$$

$$p = 500 - \frac{q}{200}$$

$$U_{(q)} = I_{(q)} - C_{(q)}$$

$$U_{(q)} = p \cdot q - C_{(q)}$$

$$U_{(q)} = \left(500 - \frac{q}{200}\right) \cdot q - (150000 + 100q + 0{,}003q^2)$$

$$U_{(q)} = 500q - \frac{q^2}{200} - 150000 - 100q + 0{,}003q^2$$

$$U_{(q)} = -0{,}008q^2 + 400q - 150000$$

$$U = f_{(q)}$$

b)

$$U_{(q)} = -0{,}008q^2 + 400q - 150000$$

$U'_{(q)} = -0{,}008 \cdot 2q + 400$

$U'_{(q)} = -0{,}016q + 400$

$$U'_{(q)} = 0$$

$0 = -0{,}016q + 400$

$0{,}016q = 400$

$$q = 25000$$

La empresa debe producir 25000 paneles solares para alcanzar su máxima utilidad.

c)

$q = 25000$

$p = 500 - \dfrac{q}{200}$

$p = 500 - \dfrac{25000}{200}$

$$p = 375$$

La empresa debe cobrar un precio de Bs 375 por panel solar para alcanzar su utilidad máxima.

d)

$$U_{(q)} = -0{,}008q^2 + 400q - 150000$$

$q = 25000$

$$U_{(25000)} = -0{,}008(25000)^2 + 400(25000) - 150000$$

$$U_{(25000)} = -5000000 + 10000000 - 150000$$

$$U_{(25000)} = 4850000$$

La empresa obtiene una utilidad máxima de Bs 4850000 por la venta de 25000 paneles solares.

e)

$$I_{(q)} = 500q - 0{,}005q^2$$

$$C_{(q)} = 150000 + 100q + 0{,}003q^2$$

f)

$$I_{(q)} = C_{(q)}$$

$$500q - 0{,}005q^2 = 150000 + 100q + 0{,}003q^2$$

$$150000 + 100q + 0{,}003q^2 - 500q + 0{,}005q^2 = 0$$

$$0{,}008q^2 - 400q + 150000 = 0$$

$$\underbrace{0{,}008}_{a}q^2 - \underbrace{400}_{b}q + \underbrace{150000}_{c} = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$q_1 = \frac{-(-400) + \sqrt{(-400)^2 - 4(0{,}008)(150000)}}{2 \cdot 0{,}008}$$

$$q_1 = 49622$$

$$I_{(49622)} = 500 \cdot 49622 - 0{,}005(49622)^2$$

$$I_{(49622)} = 12499286$$

$$P_{e^1}\ (49622\ ; 12499286)$$

$$q_2 = \frac{-(-400) - \sqrt{(-400)^2 - 4(0{,}008)(150000)}}{2 \cdot 0{,}008}$$

$$q_2 = 388$$

$$I_{(388)} = 500 \cdot 388 - 0{,}005(388)^2$$

$$I_{(388)} = 188214$$

$$P_{e^2}\ (388\ ; 188214)$$

Ejercicio 55

La ecuación de la demanda de cierta mercancía es $\mathrm{P} = (\mathrm{x} - 8)^2$ y la función del costo total está dado por $C_{(x)} = 18x - x^2$ donde $C_{(x)}$ bolivianos es el costo total cuando se compra x unidades.

a) Encontrar las funciones del ingreso marginal y del costo marginal

b) Encontrar el valor de x que rinde la máxima utilidad

Solución:

a)

$precio = (x-8)^2$

$Costo = 18x - x^2$

$$I_{(x)} = p \cdot q$$

$I_{(x)} = (x-8)^2 \cdot x$

$I_{(x)} = (x^2 - 16x + 64) \cdot x$

$I_{(x)} = x^3 - 16x^2 + 64x$

$$I'_{(x)} = 3x^2 - 32x + 64$$

$C_{(x)} = 18x - x^2$

$$C'_{(x)} = 18 - 2x$$

b)

$$I'_{(x)} = C'_{(x)}$$

$$3x^2 - 32x + 64 = 18 - 2x$$

$$3x^2 - 32x + 64 + 2x - 18 = 0$$

$$3x^2 - 30x + 46 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-30) + \sqrt{(-30)^2 - 4(3)(46)}}{2 \cdot 3} = 8{,}11$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-(-30) - \sqrt{(-30)^2 - 4(3)(46)}}{2 \cdot 3} = 1{,}89$$

$$U_{(x)} = p \cdot q - C_{(x)}$$

$$U_{(x)} = x^3 - 16x^2 + 64x - (18x - x^2)$$

$$U_{(x)} = x^3 - 16x^2 + 64x - 18x + x^2$$

$$U_{(x)} = x^3 - 15x^2 + 46x$$

$$U_{(8{,}11)} = 8{,}11^3 - 15 \cdot 8{,}11^2 + 46 \cdot 8{,}11 = -80{,}11$$

$$U_{(1{,}89)} = 1{,}89^3 - 15 \cdot 1{,}89^2 + 46 \cdot 1{,}89 = 40{,}11$$

El número de unidades que máxima la utilidad es 1,89 unidades.

Ejercicio 56

la ecuación de la demanda para cierta mercancía es $px^2 + 9p - 18 = 0$ donde $\boldsymbol{p}$ bolivianos es el precio por unidad cuando $\mathbf{100}\boldsymbol{x}$ unidades son solicitadas. Encontrar:

a) La función del precio
b) La función del ingreso marginal
c) Encontrar el ingreso total máximo

Solución:

a)

$$px^2 + 9p - 18 = 0$$

$p(x^2 + 9) - 18 = 0$

$p(x^2 + 9) = 18$

$p = \dfrac{18}{(x^2 + 9)}$

b)

$q = 100x$

$$I_{(x)} = p \cdot q$$

$$I_{(x)} = \left(\frac{18}{x^2+9}\right) \cdot 100x$$

$$I_{(x)} = \frac{1800x}{x^2+9}$$

$$I'_{(x)} = \frac{(1800x)' \cdot (x^2+9) - (x^2+9)' \cdot (1800x)}{(x^2+9)^2}$$

$$I'_{(x)} = \frac{1800 \cdot (x^2+9) - (2x) \cdot (1800x)}{(x^2+9)^2}$$

$$I'_{(x)} = \frac{1800x^2 + 1800 \cdot 9 - (2x) \cdot (1800x)}{(x^2+9)^2}$$

$$I'_{(x)} = \frac{16200 - 1800x^2}{(x^2+9)^2}$$

$$I'_{(x)} = \frac{1800(9-x)^2}{(x^2+9)^2}$$

c)

$$I'_{(x)} = \frac{1800(9-x)^2}{(x^2+9)^2}$$

$$I'_{(x)} = 0$$

$$0 = \frac{1800(9-x)^2}{(x^2+9)^2}$$

$0 = 1800(9 - x)^2$

$0 = (9 - x)^2$

$\sqrt{0} = \sqrt{(9 - x)^2}$

$0 = 9 - x$

$x = 9$

La cantidad de 9 unidades máxima la utilidad

Ejercicio 55

Un fabricante puede producir para camas de agua a un costo de Bs 10 cada uno, calcula que si los vende a x bolivianos cada uno podrá vender aproximadamente $50 - x$ bolivianos al mes.

a) Exprese la utilidad mensual del fabricante como una función del precio de venta x y represente gráficamente esta función de utilidad

b) Use el cálculo para determinar el precio de venta que ha de elevar el máximo la utilidad del fabricante

Solución:

a)

$p = 50 - x$
$x = 50 - p$

$C_x = 10x$

$$I_{(x)} = (50 - x) \cdot x$$

$I_{(x)} = 50x - x^2$

$$U_{(x)} = I_{(x)} - C_{(x)}$$

$U_{(x)} = 50x - x^2 - 10x$

$U_{(x)} = 40x - x^2$

$U_{(x)} = x(40 - x)$

$$U = f_{(p)} \qquad x = 50 - p$$

$U_{(p)} = (50 - p)(40 - 50 + p)$

$$U_{(p)} = (50 - p)(p - 10)$$

c)

$$U_{(p)} = (50 - p)(p - 10)$$

$U'_{(p)} = (50 - p)'(p - 10) + (50 - p)(p - 10)'$

$U'_{(p)} = -1 \cdot (p - 10) + (50 - p) \cdot 1$

$U'_{(p)} = -p + 10 + 50 - p$

$U'_{(p)} = -2p + 60$

$$U'_{(p)} = 0$$

$0 = -2p + 60$

$2p = 60$

$$p = 30$$

$$U_{(p)} = (50 - p)(p - 10)$$

$$U_{(30)} = (50 - 30)(30 - 10)$$

$$U_{(30)} = (20)(20)$$

$$U_{(30)} = 400$$

Al precio de Bs 30 nos proporciona una utilidad máxima de Bs 400

Ejercicio 56

El costo total de una firma que manufactura x bicicletas es

$$C_{(x)} = \frac{x^3}{12} - 5x^2 + 170x + 300.$$

a) ¿A qué nivel de producción decrece el costo marginal?
b) ¿A qué nivel de producción crece el costo marginal?
c) ¿Cuál es el mínimo costo marginal?

Solución:

a)

$$C_{(x)} = \frac{x^3}{12} - 5x^2 + 170x + 300$$

$$C'_{(x)} = \frac{3x^2}{12} - 5 \cdot 2x + 170$$

$$C'_{(x)} = \frac{x^2}{4} - 10x + 170$$

$$C'_{(x)} = 0$$

$$0 = \frac{x^2}{4} - 10x + 170$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-10) + \sqrt{(-10)^2 - 4(\frac{1}{4})(170)}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = i$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-(-10) + \sqrt{(-10)^2 - 4(\frac{1}{4})(170)}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = i$$

Entonces resolvemos de otra forma ya que nos sale imaginario el resultado.

$$C'_{(x)} = \frac{x^2}{4} - 10x + 170$$

$$C'_{(x)} = y$$

$$y = \frac{x^2}{4} - 10x + 170 \quad ..... (4)$$

$$4y = x^2 - 40x + 680$$

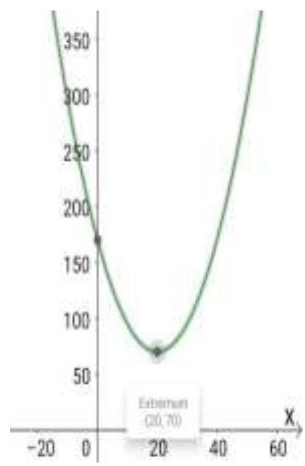
$$4y - 680 = (x-20)^2 - 20^2$$

$$4y - 280 = (x-20)^2$$

$$(x-20)^2 = 4y - 280$$

$$(x-20)^2 = 4(y-70)$$

$$V(h,k) = V(20{,}70)$$



El nivel de producción marginal decrece $0 \leq x \leq 20$ unidades.

b)

$$x > 20$$

El nivel de producción marginal crece $x > 20$ unidadades

c)

$$C'_{(x)} = \frac{x^2}{4} - 10x + 170$$

$$x = 20$$

$$C'_{(20)} = \frac{20^2}{4} - 10 \cdot 20 + 170$$

$$C'_{(20)} = 70$$

El mínimo costo marginal es de Bs 70 produciendo una cantidad de 20 unidades

Ejercicio 57

Un fabricante de accesorios electrónicos tienen unos costos de producción diarios de $C_{(x)} = 800 - 10x + \frac{x^2}{4}$

¿Cuantos accesorios x se habrían de producir cada día para minimizar los costos?.

Solución: $$C_{(x)} = 800 - 10x + \frac{x^2}{4}$$

$$C'_{(x)} = -10x + 2\frac{x}{4}$$

$$C'_{(x)} = -10 + \frac{x}{2}$$

$$C'_{(x)} = 0$$

$$0 = -10 + \frac{x}{2}$$

$$-\frac{x}{2} = -10 \quad (-1)$$

$$\frac{x}{2} = 10$$

$$x = 20$$

$$C_{(x)} = 800 - 10x + \frac{x^2}{4}$$

$$C_{(20)} = 800 - 10 \cdot 20 + \frac{20^2}{4} = 700$$

Se debe producir 20 unidades para obtener un costo mínimo de Bs 700.

Ejercicio 58

Un fabricante de radios cobra Bs 90 por unidad cuando el costo medio de producción por unidad es de Bs 60, para seguir, sin embargo, mayores pedidos de los distribuidores, el fabricante reducirá el precio en Bs 0,10 por unidad pedida a partir de las 100 primeras. Hallar el menor pedido que podría admitir el fabricante para obtener máxima utilidad.

Solución:

$p = 90 - 0{,}10(x - 100)$
$\overline{C} = 60$
$C_{(x)} = 60x$

$$I_{(x)} = p \cdot x$$

$I_{(x)} = (90 - 0{,}10(x - 100)) \cdot x$

$I_{(x)} = (90 - 0{,}10x + 10) \cdot x$

$I_{(x)} = (100 - 0{,}10x) \cdot x$

$I_{(x)} = 100x - 0{,}10x^2$

$$U_{(x)} = I_{(x)} - C_{(x)}$$

$U_{(x)} = 100x - 0{,}10x^2 - 60x$

$U_{(x)} = 40x - 0{,}10x^2$

$U'_{(x)} = 40 - 0{,}20x$

$$U'_{(x)} = 0$$

$0 = 40 - 0{,}20x \qquad x = 200$

La empresa para obtener la utilidad máxima de Bs 4000 debe producir 200 unidades

Ejercicio 59

Un fabricante de radios cobra Bs 90 por unidad cuando el costo medio de producción por unidad es de Bs 60, para seguir, sin embargo, mayores pedidos de los distribuidores, el fabricante reducirá el precio en Bs 0,10 por unidad pedida a partir de las 100 primeras. Hallar el menor pedido que podría admitir el fabricante para obtener máximo.

Solución:

$p \; = \; 90 - 0{,}10(x - 100)$

$\overline{C} \; = 60$

$C_{(x)} = \; 60x$

$$I_{(x)} = p \cdot x$$

$I_{(x)} = (90 - 0{,}10(x - 100)) \cdot x$

$I_{(x)} = (90 - 0{,}10x + 10) \cdot x$

$I_{(x)} = (100 - 0{,}10x) \cdot x$

$I_{(x)} = 100x - 0{,}10x^2$

$$U_{(x)} = I_{(x)} - C_{(x)}$$

$U_{(x)} = 100x - 0{,}10x^2 - 60x$

$$U_{(x)} = 40x - 0{,}10x^2$$

$$U'_{(x)} = 40 - 0{,}20x$$

$$U'_{(x)} = 0$$

$$0 = 40 - 0{,}20x \qquad x = 200$$

La empresa para obtener la utilidad máxima de Bs 4000 debe producir 200 unidades

Ejercicio 60

Una Empresa que fabrica y vende escritorios trabaja en competición perfecta y puede vender a un precio de Bs 200 el escritorio, todos los escritorios que produce si $\boldsymbol{x}$ escritorios se produce y se vende cada semana y $\boldsymbol{C_{(x)}}$ bolivianos es el costo total de la producción semanal, entonces $C_{(x)} = x^2 + 4x + 3000$. Determine cuantos escritorios deberán fabricar por semana para que la empresa obtenga la mayor utilidad total por semana ¿Cuál es dicha utilidad total máxima por semana?

Solución:

$$precio \ = \ 200$$

$$Se\ x:\ número\ de\ escritorios$$

$$C_{(x)} = x^2 + 4x + 3000$$

$$I_{(x)} = 200x$$

$$U_{(x)} = I_{(x)} - C_{(x)}$$

$U_{(x)} = 200x - x^2 - 4x - 3000$

$U_{(x)} = -x^2 + 196x - 3000$

$U'_{(x)} = -2x + 196$

$$U'_{(x)} = 0$$

$0 = -2x + 196 \quad x = 98$

$U_{(98)} = -98^2 + 196 \cdot 98 - 3000 = 6604$

La empresa debe fabricar 98 unidades para obtener una utilidad máxima de Bs 6604.

Ejercicio 61

Suponga que en una situación de monopolio la ecuación de la demanda de cierto artículo es $p = 6 - \frac{1}{5}\sqrt{x - 100}$, donde p bolivianos es el precio por artículo cuando se demanda x artículos y $x \in [100,1000]$. Si $C_{(x)}$ bolivianos es el costo total de la producción de x artículos, entonces: $C_{(x)} = 2x + 100$.

a) Encuentre las funciones del ingreso marginal y del costo marginal
b) Calcule el valor de x que arroje la máxima utilidad

Solución:

a)

$$p = 6 - \frac{1}{5}\sqrt{x - 100}$$

$$I_{(x)} = p \cdot x$$

$$I_{(x)} = \left(6 - \frac{1}{5}\sqrt{x - 100}\right) \cdot x$$

$$I_{(x)} = 6x - \frac{1}{5}x\sqrt{x - 100}$$

$$I'_{(x)} = (6x)' - \left[\left(\frac{1}{5}x\right)' \sqrt{x - 100} + \frac{1}{5}x\left(\sqrt{x - 100}\right)'\right]$$

$$I'_{(x)} = 6 - \left[\frac{1}{5}\sqrt{x-100} + \frac{1}{5}x\left(\frac{1}{2\sqrt{x-100}}\right)\right]$$

$$I'_{(x)} = 6 - \left[\frac{1}{5}\sqrt{x-100} + \frac{x}{10\sqrt{x-100}}\right]$$

$$I'_{(x)} = 6 - \frac{1}{5}\sqrt{x-100} - \frac{x}{10\sqrt{x-100}}$$

$$C_{(x)} = 2x + 100$$

$$C'_{(x)} = 2$$

b)

$$I'_{(x)} = C'_{(x)}$$

$$6 - \frac{1}{5}\sqrt{x-100} - \frac{x}{10\sqrt{x-100}} = 2$$

$$-\frac{1}{5}\sqrt{x-100} - \frac{x}{10\sqrt{x-100}} = -4 \quad \dots(-1)$$

$$\frac{1}{5}\sqrt{x-100} + \frac{x}{10\sqrt{x-100}} = 4$$

$$\frac{2\sqrt{(x-100)}^{2} + x}{10\sqrt{x-100}} = 4$$

$$\frac{2x - 200 + x}{10\sqrt{x-100}} = 4$$

$$\frac{3x-200}{10\sqrt{x-100}}=4$$

$$3x-200=40\sqrt{x-100}$$

$$(3x-200)^2=40^2\left(\sqrt{x-100}\right)^2$$

$$(3x)^2-1200x+200^2=40^2(x-100)$$

$$9x^2-1200x+40000=1600x-160000$$

$$9x^2-1200x-1600x+40000+160000=0$$

$$9x^2-2800x+200000=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-(-2800)+\sqrt{(-2800)^2-4(9)(200000)}}{2\cdot 9}=200$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-(-2800) - \sqrt{(-2800)^2 - 4(9)(200000)}}{2 \cdot 9} = 111{,}11$$

$$x_1 = 200$$

$$U_{(x)} = I_{(x)} - C_{(x)}$$

$$U_{(x)} = 6x - \frac{1}{5}x\sqrt{x-100} - 2x - 100$$

$$U_{(x)} = 4x - \frac{1}{5}x\sqrt{x-100} - 100$$

$$U_{(200)} = 4 \cdot 200 - \frac{1}{5}200\sqrt{200-100} - 100$$

$$U_{(200)} = 300$$

$$x_2 = 111{,}11$$

$$U_{(x)} = 4x - \frac{1}{5}x\sqrt{x-100} - 100$$

$$U_{(111{,}11)} = 4 \cdot 111{,}11 - \frac{1}{5}111{,}11\sqrt{111{,}11-100} - 100$$

$$U_{(111{,}11)} = 270{,}37$$

La máxima la utilidad Bs 300 es alcanzada produciendo 200 artículos.

Ejercicio 62

En competencia perfecta, una firma puede vender a un precio de Bs 100 por unidad todo lo que produce de una cierta mercancía. Si a diario se produce $\boldsymbol{x}$ unidades, el número de bolivianos del costo total de la producción diaria, es $\boldsymbol{x^2 + 20x + 700}$. Hallar el número de unidades que deben producirse diariamente para que la firma obtenga la máxima utilidad total diaria.

Solución:

$p = 100$

$$C_{(x)} = x^2 + 20x + 700$$

$I_{(x)} = p \cdot q$

$$I_{(x)} = 100 \cdot x$$

$$U_{(x)} = I_{(x)} - C_{(x)}$$

$U_{(x)} = 100x - (x^2 + 20x + 700)$

$U_{(x)} = 100x - x^2 - 20x - 700$

$U_{(x)} = -x^2 + 80x - 700$

$U'_{(x)} = -2x + 80$

$$U'_{(x)} = 0$$

$0 = -2x + 80$

$$x = 40$$

$U_{(40)} = -40^2 + 80 \cdot 40 - 700 = 900$

La empresa debe producir 40 unidades para alcanzar la máxima utilidad Bs 900.

Ejercicio 63

Un fabricante en la producción de ciertos artículos, ha descubierto que la demanda del artículo viene representado por $x = \frac{2500}{p^2}$ suponiendo que el ingreso total $I_{(x)}$ esta por $I_{(x)} = xp$ que el costo de producción $\boldsymbol{x}$ artículos está dado por: $C_{(x)} = 0{,}5x + 500$, hallar el precio por unidad que de un beneficio máxima.

Solución:

$x = \dfrac{2500}{p^2}$

$$I_{(x)} = p \cdot x$$

$I_{(p)} = \left(\frac{2500}{p^2}\right) \cdot p$

$I_{(p)} = \dfrac{2500}{p}$

$$C_{(x)} = 0{,}5x + 500$$

$$C_{(p)} = 0{,}5 \cdot \frac{2500}{p^2} + 500$$

$$C_{(p)} = \frac{1250}{p^2} + 500$$

$$U_{(p)} = I_{(p)} - C_{(p)}$$

$$U_{(p)} = \frac{2500}{p} - \frac{1250}{p^2} - 500$$

$$U'_{(p)} = -\frac{2500}{p^2} - \frac{1250 \cdot 2 \cdot (-1)}{p^3}$$

$$0 = -\frac{2500}{p^2} + \frac{2500}{p^3}$$

$$0 = -\frac{2500}{p^2} + \frac{2500}{p^3} \quad \ldots (p^3)$$

$$0 \cdot p^3 = -\frac{2500}{p^2} \cdot p^3 + \frac{2500}{p^3} \cdot p^3$$

$$0 = -2500 \cdot p + 2500$$

$$2500 \cdot p = 2500$$

$$p = 1$$

$$U_{(p)} = \frac{2500}{p} - \frac{1250}{p^2} - 500$$

$$U_{(p)} = \frac{2500}{1} - \frac{1250}{1^2} - 500$$

$$U_{(p)} = 750$$

El fabricante para obtener la máxima utilidad de Bs 750 debe vender su producto a Bs 1.

Ejercicio 64

La función de demanda de un cierto artículo está dado por $p = (16 - x)^{\frac{1}{2}} \quad 0 \leq x \leq 16$, calcular para qué precio y cantidad el ingreso es máximo.

Solución:

$$p = (16 - x)^{\frac{1}{2}}$$

$$I_{(x)} = p \cdot x$$

$$I_{(x)} = (16 - x)^{\frac{1}{2}} \cdot x$$

$$I'_{(x)} = \left[(16 - x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\prime} x + (x)^{\prime}(16 - x)^{\frac{1}{2}}$$

$$I'_{(x)} = \left[(16 - x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\prime} x + (x)^{\prime}(16 - x)^{\frac{1}{2}}$$

$$I'_{(x)} = \frac{1}{2}(16-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot x + 1 \cdot (16-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$I'_{(x)} = -\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{16-x}} + \sqrt{16-x}$$

$$I'_{(x)} = 0$$

$$0 = -\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{16-x}} + \sqrt{16-x}$$

$$\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{16-x}} = \sqrt{16-x}$$

$$\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{16-x}} = \sqrt{16-x}$$

$$\frac{1}{2}x = \left(\sqrt{16-x}\right)^2$$

$$\frac{1}{2}x = 16 - x$$

$$\frac{1}{2}x + x = 16$$

$$\frac{3x}{2} = 16$$

$$x = \frac{32}{3}$$

$$p = (16 - \frac{32}{3})^{\frac{1}{2}}$$

$$p = \left(\frac{16}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$p = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{3}} \qquad p = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$p = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Ejercicio 65

Un cierto artículo tiene una función de demanda dada por

$p = 100 - \frac{x^2}{2}$ y la función de costo total $C_{(x)} = 40x + 375$.

¿Qué precio da el beneficio máximo?

Solución:

$$p = 100 - \frac{x^2}{2}$$

$$I_{(x)} = p \cdot x$$

$$I_{(x)} = \left(100 - \frac{x^2}{2}\right) \cdot x$$

$$I_{(x)} = 100x - \frac{x^3}{2}$$

$$C_{(x)} = 40x + 375$$

$$U_{(x)} = I_{(x)} - C_{(x)}$$

$$U_{(x)} = 100x - \frac{x^3}{2} - 40x - 375$$

$$U_{(x)} = -\frac{x^3}{2} + 60x - 375$$

$$U'_{(x)} = -\frac{3x^2}{2} + 60$$

$$U'_{(x)} = 0$$

$$0 = -\frac{3x^2}{2} + 60$$

$$\frac{3x^2}{2} = 60$$

$$x^2 = \frac{60 \cdot 2}{3}$$

$$x^2 = 40$$

$$p = 100 - \frac{x^2}{2}$$

$$p = 100 - \frac{40}{2}$$

$$p = 80$$

El precio que máxima la utilidad es de Bs 80.

Ejercicio 66

Un fabricante de equipos de sonido estéreo determina que con el fin de vender x unidades de un nuevo modelo, el precio por unidad debe ser $p = 1000 - x$. El fabricante también determina que el costo total de producir x unidades está dado por $C_{(x)} = 3000 + 20x$.

a) Hallar el ingreso totales
b) Hallar la utilidad total
c) ¿Cuántas unidades debe producir y vender la compañía con el fin de maximizar la utilidad?
d) ¿Cuál es la utilidad máxima?
e) ¿Qué precio por unidad se debe cobrar con el fin de obtener esta utilidad máxima?

Solución:

a)

$p = 1000 - x$

$$I_{(x)} = p \cdot x$$

$I_{(x)} = (1000 - x) \cdot x$

$$I_{(x)} = 1000x - x^2$$

b)

$$U_{(x)} = I_{(x)} - C_{(x)}$$

$U_{(x)} = 1000x - x^2 - (3000 + 20x)$

$U_{(x)} = 1000x - x^2 - 3000 - 20x$

$$U_{(x)} = -x^2 + 980x - 3000$$

c)

$$U_{(x)} = -x^2 + 980x - 3000$$

$U'_{(x)} = -2x + 80$

$$U'_{(x)} = 0$$

$0 = -2x + 980$

$$x = 490$$

$U_{(490)} = -490^2 + 980 \cdot 490 - 3000$

$$U_{(490)} = 237100$$

La cantidad de 490 unidades nos proporciona una utilidad máxima de Bs 237100.

d)

$x = 490$

$p = 1000 - x$

$p = 1000 - 490$

$$p = 510$$

Al precio de Bs 510 la empresa consigue la utilidad máxima.

Ejercicio 67

Una firma de confecciones, determina que con el fin de vender x prendas , el precio por cada una debe ser $p = 150 - 0{,}5x$. también determina que el costo total de producir x prendas está dado por

$C_{(x)} = 4000 + 0{,}25x^2$.

a) Halle los ingresos totales
b) Halle la utilidad total
c) ¿Cuántos vestidos debe producir y vender la compañía con el fin de maximizar las utilidades?
d) ¿Cuál es la máxima utilidad?

Solución:

a)

$p = 150 - 0{,}5x$

$$I_{(x)} = p \cdot x$$

$I_{(x)} = (150 - 0{,}5x) \cdot x$

$$I_{(x)} = 150x - 0{,}5x^2$$

b)

$$U_{(x)} = I_{(x)} - C_{(x)}$$

$U_{(x)} = 150x - 0{,}5x^2 - (4000 + 0{,}25x^2)$

$U_{(x)} = 150x - 0{,}5x^2 - 4000 - 0{,}25x^2$

$$U_{(x)} = -0{,}75x^2 + 150x - 4000$$

c)

$$U_{(x)} = -0{,}75x^2 + 150x - 4000$$

$U'_{(x)} = -1{,}5x + 150$

$$U'_{(x)} = 0$$

$0 = -1{,}5x + 150$

$$x = 100$$

La cantidad que máxima la utilidad es de 100 vestidos

d)

$U_{(100)} = -0{,}75 \cdot 100^2 + 150 \cdot 600 - 4000$

$$U_{(100)} = 3500$$

La cantidad de 100 vestidos nos proporciona una utilidad máxima de Bs 3500.

Bibliografía

(1) ALGEBRA PRE-UNIVERSITARIO Paulino Choque Puña 2001

(2) ALGEBRA 2011 Rubiño Ediciones 2010

(3) ELEMENTOS DE CALCULO INFITESIMAL H.B Philips 1956

(4) DERIVADAS E INTEGRALES Enrique Luis Etchegoyen 1956

(5) CALCULO 1 Ron Larzon Bruce H. EDWARS 2010

(6) ELEMENTOS DE CALCULO INFINITESIMAL H.B Phillips 1956

(7) CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL Franh Ayres, Jr. Eliot Mendelson