





UNIVERSIDAD MAYOR, REAL Y PONTIFICIA DE  
SAN FRANCISCO XAVIER DE CHUQUISACA

FACULTAD DE TECNOLOGIA



***FISICA BASICA II***  
***(FIS 102)***

*Ing. Jaime Iván OÑA O.*

Sucre - Bolivia  
1986 - 2014



UNIVERSIDAD MAYOR, REAL Y PONTIFICIA DE  
SANFRANCISCO XAVIER DE CHUQUISACA

FACULTAD DE TECNOLOGIA

FISICA BASICA II  
(FIS 102)

**C O N T E N I D O**

I.	OSCILACIONES.....	3
II.	ELASTICIDAD .....	28
III.	HIDROSTATICA.....	25
IV.	HIDRODINAMICA.....	52
V.	TEMPERATURA Y DILATAACION .....	71
VI.	CANTIDAD DE CALOR.....	82
VII.	TRANSMISION DE CALOR .....	89
VIII.	PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA.....	100
IX.	TEORIA CINETICA DE LOS GASES .....	111
X.	LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA .....	125



## CAPITULO I

## OSCILACIONES

En el curso anterior hemos estudiado el movimiento de un cuerpo sometido a una fuerza constante. Nos hemos referido al movimiento uniformemente acelerado (MUA).

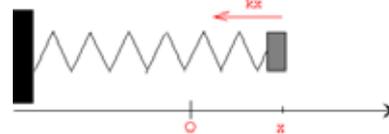
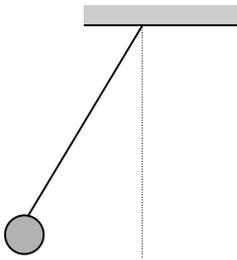
En éste capítulo estudiaremos el movimiento de un cuerpo cuando la fuerza que actúa sobre él no es constante, sino varía durante el movimiento.

Aunque la fuerza puede variar de muchas maneras, en cualquier momento se cumplirá la *Segunda ley de Newton*:  $F = m a$  ó  $m = F/a$ .

Un movimiento cualquiera que se repita a intervalos de tiempo iguales se llama *movimiento periódico*.

El desplazamiento de una partícula en un movimiento periódico, como veremos más adelante, se puede expresar siempre mediante *senos y cosenos*, y como las expresiones donde figuran éstas funciones se denominan *armónicas* a menudo el movimiento periódico se llama *movimiento periódico*.

Si una partícula que tiene *movimiento periódico* se mueve alternativamente en un sentido y en otro, siguiendo la misma trayectoria, su movimiento es denominado *oscilatorio o vibratorio*.



El movimiento de un péndulo de un reloj de pared es oscilatorio.

Un cuerpo en el extremo de un resorte estirado, una vez que se suelta comienza a oscilar. El movimiento de las cuerdas de los instrumentos musicales es vibratorio. Los átomos de un sólido están vibrando. Similarmente los átomos en una molécula vibran unos con respecto a otros.

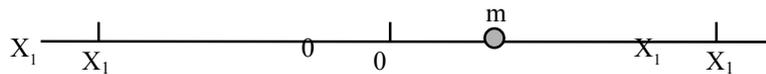
Muchos cuerpos oscilantes *no* se mueven entre límites fijos bien definidos, porque las fuerzas friccionales, disipan la energía del movimiento; así un péndulo deja de oscilar, una cuerda deja de vibrar, etc.

Estos movimientos reciben el nombre de *Movimientos Armónicos Amortiguados*.

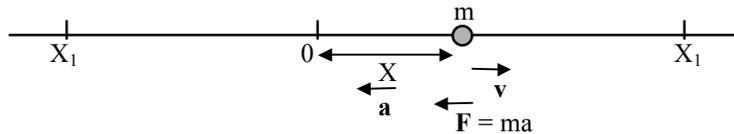
Aunque no podemos eliminar la fricción de los movimientos periódicos, a menudo se pueden anular sus efectos de amortiguamiento *suministrando energía* al sistema oscilante, de manera de compensar la energía disipada por fricción. El resorte principal de un reloj de pulsera y la pesa de un reloj de péndulo suministran la energía externa, de tal forma que el sistema oscilante se mueve como si no estuviese amortiguado.

No solamente los sistemas mecánicos pueden oscilar. Las ondas de radio, las microondas y la luz visible son vectores de campo magnético y eléctrico oscilantes. Como veremos en un capítulo posterior, las oscilaciones mecánicas y electromagnéticas están descritas por las mismas ecuaciones matemáticas básicas.

Estudiamos una partícula que oscila en vaivén sobre una línea recta entre límites fijos.



Su desplazamiento  $x$  cambia periódicamente, *tanto en magnitud como en sentido*. Su velocidad  $v$  y su aceleración  $a$  también *varían* periódicamente en *magnitud y en sentido* y en vista de la relación  $F=ma$ , también lo hace así la fuerza  $F$  que actúa sobre la partícula.



En términos de la energía, podemos decir, que una partícula que está en movimiento armónico pasa en uno y otro sentido por un punto en el cual su *energía potencial es mínima* (su posición de equilibrio).

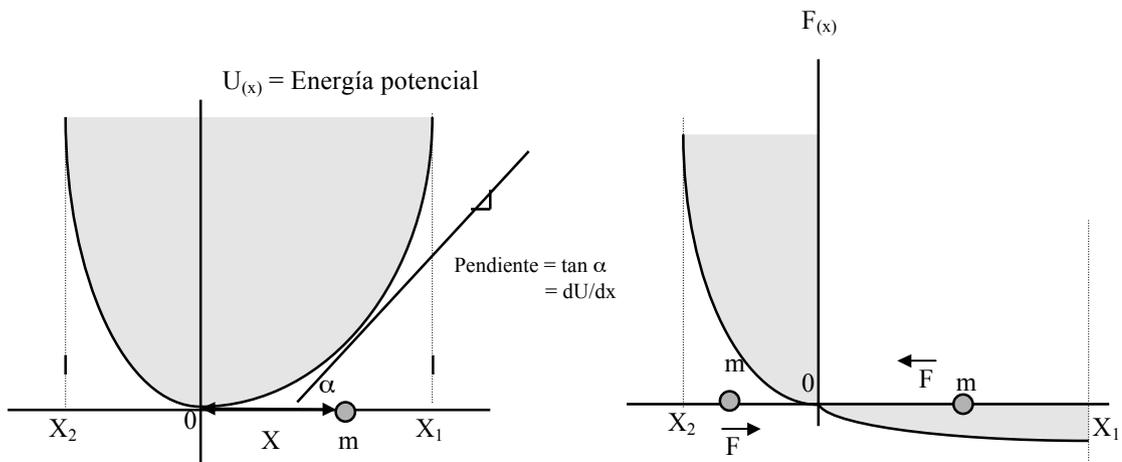
La fuerza que actúa sobre la partícula de masa  $m$ , en cualquier posición puede obtenerse de la función de la energía potencial:

$$F = - \frac{dU}{dX}$$

Podemos representar la variación de la fuerza con la posición de la partícula:

La *fuerza es cero en la posición de equilibrio* (punto  $0$ ), apunta hacia la derecha (tiene un valor positivo) cuando la partícula está a la izquierda de  $0$ , y apunta hacia la izquierda (tiene un valor negativo) cuando la partícula está a la derecha de  $0$ .

La fuerza  $F$  es una *fuerza de restitución* porque actúa siempre de manera de acelerar a la partícula en la dirección de su *posición de equilibrio*

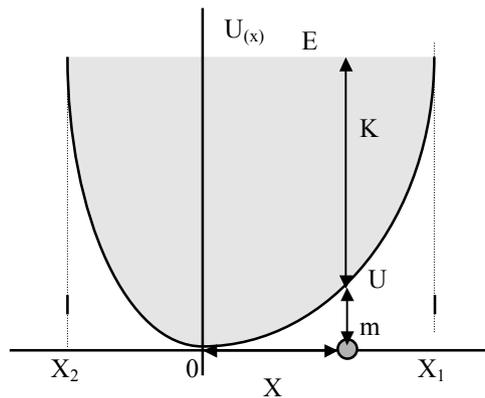


La energía mecánica total  $E$  de una partícula oscilante es la suma de su energía cinética y de su energía potencial, es decir:

$$\text{Energía Mecánica} = \text{Energía Cinética} + \text{Energía Potencial}$$

$$E = K + U$$

Donde E permanece constante (si las fuerzas de fricción son nulas). En los límites  $x_1$  y  $x_2$ ,  $U=E$ :

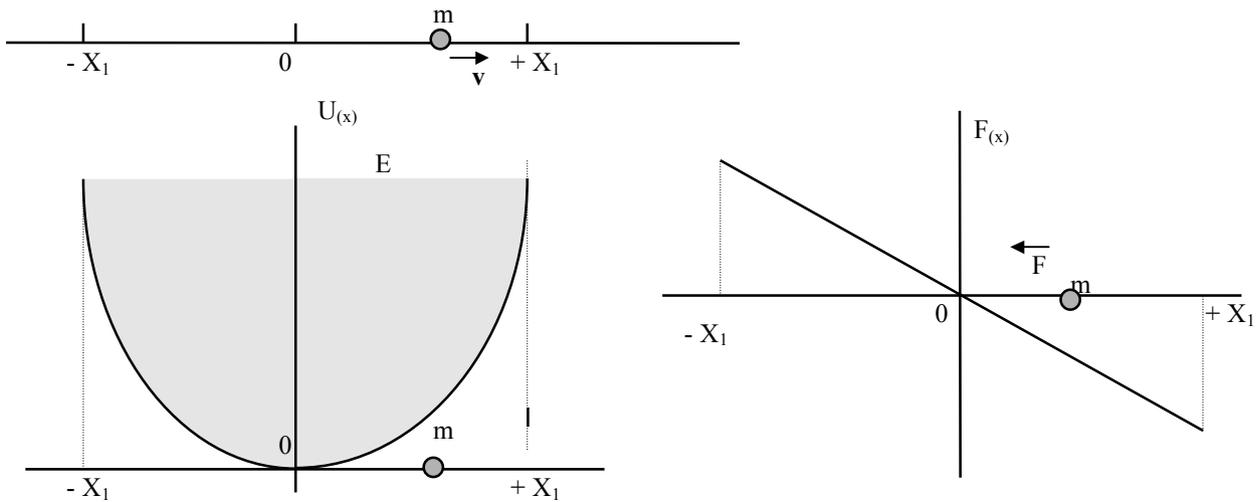


## EL OSCILADOR ARMONICO SIMPLE

Vamos a considerar una partícula oscilante que se mueve en uno y otro sentido alrededor de una posición de equilibrio, en virtud de un potencial que varía según:

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

donde k es una constante. Los límites máximos del desplazamiento  $x_1$  y  $x_2$  son iguales:



La fuerza que actúa sobre la partícula esta dada por la ecuación:

$$F = - \frac{dU}{dx}$$

$$F = - \frac{d\left(\frac{1}{2} k x^2\right)}{dx}$$

De donde:

$$F = -k x$$

Esta partícula oscilante recibe el nombre de *oscilador armónico simple* y su movimiento se llama *movimiento armónico simple*.

Recordemos que en el Movimiento Armónico Simple (M.A.S.), los límites de la oscilación están igualmente espaciados a uno y otro lado de la posición de equilibrio.

Veamos algunas definiciones muy características del movimiento armónico:

La magnitud del *desplazamiento máximo*,  $x_1$ , se llama *amplitud A* del movimiento armónico simple.

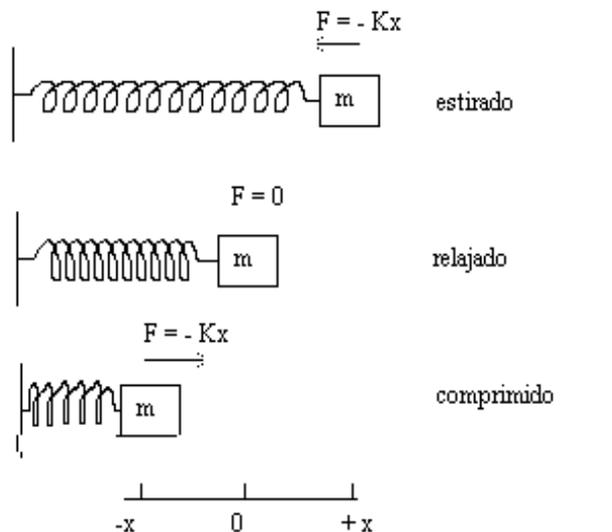
El *periodo T* de un movimiento armónico es el tiempo requerido para completar un viaje redondo del movimiento, es decir una oscilación completa o ciclo.

La *frecuencia f*, del movimiento es el *número de oscilaciones o ciclos por unidad de tiempo*. La frecuencia es por tanto la inversa del periodo:

$$f = \frac{1}{T}$$

La unidad en el SI de la frecuencia es el ciclo por segundo o Hertz (Hz).

En la ecuación  $U(x) = \frac{1}{2} k x^2$ , reconocemos la expresión de la energía potencial de un resorte ideal, comprimido o estirado en una distancia  $x$ , en la cuál la fuerza ejercida está dada por  $F = -kx$ , siendo  $k$  la denominada *constante elástica* del resorte.



En la posición de equilibrio la fuerza neta es nula, el resorte no ejerce ninguna fuerza sobre el cuerpo. Cuando el cuerpo está a la derecha de la posición de equilibrio (resorte estirado), la fuerza apunta hacia la izquierda y viene dada por  $F = -kx$ , y cuando el cuerpo está a la izquierda (resorte comprimido) la fuerza apunta a la derecha y vale también  $F = -kx$ .

$F$  es una fuerza de restauración denominada *fuerza recuperadora elástica*.

Por lo tanto, un cuerpo de masa  $m$  fijo a un resorte ideal de constante elástica  $k$ , libre de moverse en una superficie horizontal sin fricción es un ejemplo de un oscilador armónico simple, siendo su movimiento un movimiento armónico simple.

Apliquemos la segunda ley de Newton  $F = ma$ , al movimiento del resorte. Para un oscilador armónico simple  $F = -kx$  y para la aceleración ponemos

$$a = \frac{dv}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

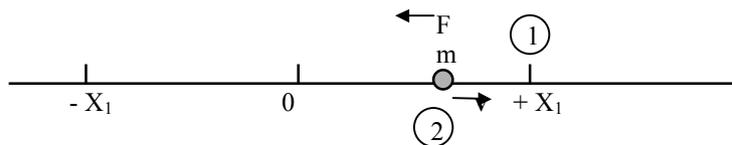
Esta ecuación contiene derivadas y por lo tanto se dice que es una ecuación diferencial. Resolver esta ecuación quiere decir determinar la forma en que el desplazamiento  $x$  de la partícula debe depender del tiempo para que dicha ecuación quede satisfecha.

Cuando sabemos como depende  $x$  del tiempo, conocemos el movimiento de la partícula, por lo tanto la ecuación anterior se llama *la ecuación del movimiento* de un oscilador armónico simple. Describamos a continuación en detalle este movimiento.

### ECUACIONES DEL MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

Se trata de obtener las expresiones de la elongación, la velocidad y la aceleración de un cuerpo que se mueve con M.A.S.

Consideremos nuevamente, una partícula que se mueve en uno y otro sentido, al rededor de un punto de equilibrio:



La fuerza que actúa sobre la partícula es únicamente la *fuerza recuperadora elástica*:  $-kx$ ; por la segunda ley de Newton:

$$F = -kx = ma$$

$$a = -\frac{k}{m}x$$

Donde  $m$  es la masa del cuerpo y  $k/m$  es constante.

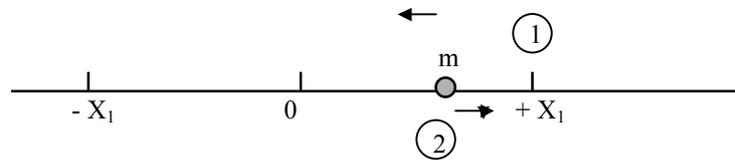
Es decir la aceleración es directamente proporcional a la elongación  $x$  pero de sentido contrario a ella.

“La aceleración está siempre dirigida hacia el punto medio de la trayectoria”.

La velocidad del cuerpo en cualquier punto, puede obtenerse a partir del *principio de la conservación de la energía*, suponiendo despreciables las fuerzas de rozamiento.

En las dos posiciones donde la elongación  $x$ , es igual a la amplitud  $A$  (en  $-x_1$  y  $+x_1$ ), la energía cinética es nula y la energía potencial vale  $\frac{1}{2} k A^2$ .

Si  $v$  es la velocidad del cuerpo para un valor arbitrario de elongación  $x$ , su energía cinética será  $\frac{1}{2} m v^2$  y su energía potencial  $\frac{1}{2} k x^2$ .



$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

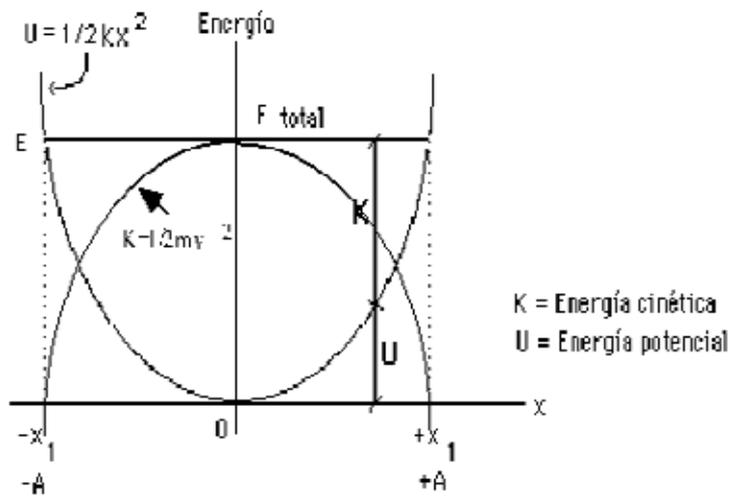
$$K_1 = 0 \quad ; \quad U_1 = \frac{1}{2} k A^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m v^2 \quad ; \quad U_2 = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$v^2 = \frac{k}{m} (A^2 - x^2)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{k/m} \sqrt{A^2 - x^2}$$



Podemos ver que la *velocidad máxima* de la partícula será en el punto de equilibrio 0 (energía potencial cero), es decir cuando  $x = 0$ :

$$v_{max} = \sqrt{k/m} A$$

En los puntos de máximo desplazamiento, donde  $x_1 = A$ ; la energía cinética es nula y la energía potencial máxima. Algunos autores consideran una velocidad positiva cuando la partícula se mueve de izquierda a derecha y negativa cuando se mueve de derecha a izquierda.

Para obtener la *elongación*  $x$  del movimiento en función del tiempo, separemos variables e integremos la ecuación de la velocidad:

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{k/m} \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sqrt{k/m} \int dt$$

$$\text{ArcSen} \frac{x}{A} = \sqrt{k/m} t + C$$

Cuando  $t = 0$  ;  $x = x_0$

$$C = \text{ArcSen} \frac{x_0}{A} \quad ; \quad \text{Sen } \phi = \frac{x_0}{A}$$

$$\phi = \text{ArcSen} \frac{x_0}{A}$$

$$\text{ArcSen} \frac{x}{A} = \sqrt{k/m} t + \phi \quad ; \quad \frac{x}{A} = \text{Sen}(\sqrt{k/m} t + \phi)$$

$$x = A \text{ Sen} (\sqrt{k/m} t + \phi)$$

Si escogemos la constante  $k/m = \omega^2$ :

$$\mathbf{x = A \text{ Sen } [\omega t + \phi]}$$

La cantidad  $(\omega t + \phi)$  se denomina *fase* del movimiento. La constante  $\phi$  se llama la constante de fase (esto es, su valor cuando  $t = 0$ ).

Aunque hemos definido el movimiento armónico simple en función de una expresión senoidal, puede igualmente expresarse en función de una expresión cosenoidal, el único cambio sería una diferencia inicial de fase de  $\pi/2$ :

$$\text{si: } \phi = \pi/2$$

$$x = A \text{ Sen}(\omega t + \pi/2)$$

$$\mathbf{x = A \text{ Cos } \omega t}$$

De modo que en el tiempo  $t = 0$  el desplazamiento es cero para  $x = A \text{ Sen} \omega t$ . Cuando  $\phi = 0$ , el desplazamiento  $x = A \text{ Cos} \omega t$  es máximo en el tiempo  $t = 0$ . Otras condiciones iniciales corresponden a otras constantes de fase.

Determinemos ahora el significado físico de la constante  $\omega$ . Si en la ecuación del desplazamiento  $x = A \text{ Sen}(\omega t + \phi)$  se aumenta el tiempo en  $2\pi/\omega$ , la función se transforma en:

$$x = A \text{ Sen}[\omega (t + 2\pi/\omega) + \phi]$$

$$= A \text{ Sen}(\omega t + 2\pi + \phi)$$

$$= A \text{ Sen}(\omega t + \phi)$$

Es decir, que la función simplemente se repite a sí misma después de un tiempo  $2\pi/\omega$ . Por lo tanto,  $2\pi/\omega$  es el *periodo*  $T$  del movimiento. Como  $\omega^2 = k/m$  tenemos:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

La *frecuencia*  $f$  del oscilador es el número de vibraciones completas por unidad de tiempo, y estará dada por:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m}$$

$$2\pi f = \sqrt{k/m}$$

$$\omega = 2\pi f$$

La cantidad  $\omega$  se llama *frecuencia angular*; difiere de la frecuencia  $f$  en un factor  $2\pi$ . Tiene las dimensiones de un recíproco del tiempo (las mismas que la rapidez angular) y su unidad es el radian/segundo.

La constante  $A$  tiene un significado físico sencillo. La función coseno puede tomar valores de -1 a +1. El desplazamiento  $x$  medido desde la posición central de equilibrio  $x = 0$  tiene, por lo tanto, el valor máximo de  $A$ . Así pues  $A (=x_{\text{máx}})$  es la amplitud del movimiento.

*La frecuencia de un movimiento armónico simple es independiente de la amplitud del movimiento.*

Las expresiones de la velocidad y de la aceleración podemos obtener a partir de la ecuación:

$$x = A \text{ Sen}(\omega t + \emptyset)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \text{ Cos}(\omega t + \emptyset)$$

Similarmente la aceleración está dada por:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \text{ Sen}(\omega t + \emptyset)$$

La cual indica que en el movimiento armónico simple la aceleración es siempre proporcional y opuesta al desplazamiento.

Podríamos también escribir:

M.U.A.

$$x = A \text{ Sen}(\omega t + \phi)$$

$$x = A \text{ Cos} \omega t$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = \omega A \text{ Cos}(\omega t + \phi)$$

$$v = -\omega A \text{ Sen} \omega t$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

$$a = -\omega^2 A \text{ Sen}(\omega t + \phi)$$

$$a = -\omega^2 A \text{ Cos} \omega t$$

$$a = \text{constante}$$

Luego, la energía cinética, la energía potencial y la energía mecánica total serán:

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \text{ Sen}^2(\omega t + \phi)$$

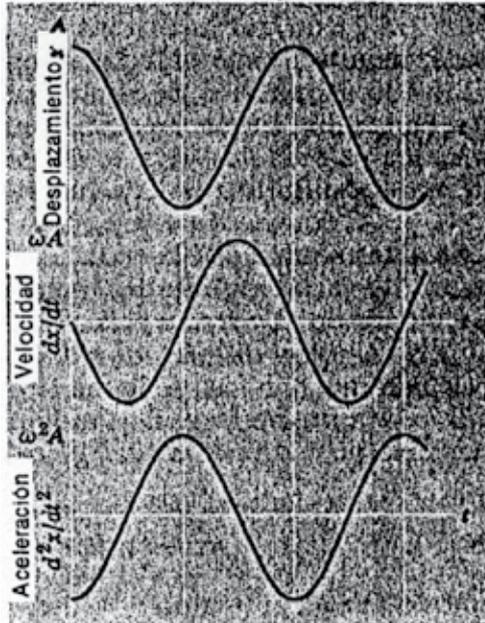
$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \text{ Cos}^2(\omega t + \phi)$$

$$\text{como: } \omega^2 = k/m$$

$$K = \frac{1}{2} k A^2 \text{ Cos}^2(\omega t + \phi)$$

$$E = U + K = \frac{1}{2} k A^2$$

En la figura siguiente, se muestran las relaciones entre el desplazamiento, la velocidad y la aceleración, en el movimiento armónico simple. En este caso particular la constante de fase  $\phi = 0$  puesto que en  $t = 0$  el desplazamiento es máximo para  $x = A \cos(\omega t + \phi)$ .



Las relaciones entre el desplazamiento, la velocidad y la aceleración, en el movimiento armónico simple, En este caso Particular la constante de fase  $\phi$  es 0 puesto que en  $t = 0$  el desplazamiento es máximo; véase la Ec. 15-8

## PENDULO SIMPLE

Un ejemplo de *movimiento armónico simple* es el movimiento de un péndulo.

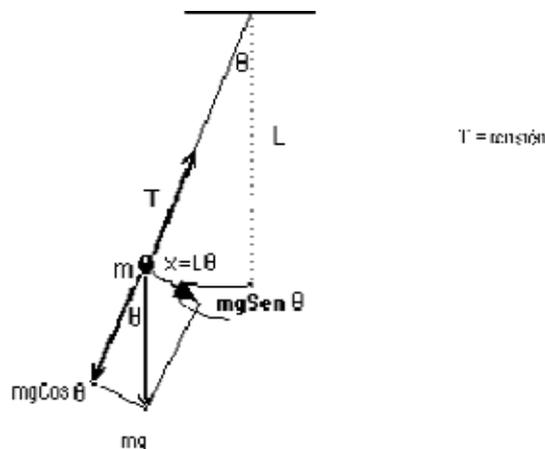
Un péndulo simple es una masa de pequeñas dimensiones suspendida de un hilo inextensible y de peso despreciable.

Cuando se le desvía hacia un lado de su posición de equilibrio y se abandona a sí mismo, el péndulo oscila en un plano vertical por la influencia de la gravedad. El movimiento es periódico y oscilatorio. Queremos determinar el período del movimiento.

Consideremos un péndulo de longitud  $L$ , en el que la masa de la partícula es  $m$  y que forma un ángulo  $\theta$  con la vertical.

Las fuerzas que actúan sobre  $m$  son la fuerza gravitacional y la tensión de la cuerda.

Elijamos dos ejes; uno en la dirección de la tangente y el otro en el de la radio y descompongamos el peso según estos ejes.



La componente radial ( $mg\cos\theta$ ) proporciona la aceleración centrípeta necesaria para mantener a la partícula en movimiento sobre un aro circular; la *componente tangencial* es la *fuerza restauradora* que actúa sobre  $m$  y hace tender a recobrar su posición de equilibrio.

La *fuerza recuperadora* es:

$$F = - m g \text{ Sen } \theta$$

Donde el signo menos se debe a que se opone al desplazamiento.

Esta ecuación no es de mismo tipo que:  $F = - k x$  debido a que  $F$  es proporcional a  $\text{Sen } \theta$ , y no a  $\theta$ . Por lo tanto el movimiento no es un M.A.S.

Sin embargo si el ángulo  $\theta$  es pequeño, lo cual es cierto si la amplitud de las oscilaciones es pequeña,  $\text{Sen } \theta$  es aproximadamente igual a  $\theta$  (expresado en radianes

$$\text{Sen } \theta \approx \theta$$

$$F = - m g \theta$$

o

$$x \approx \theta L$$

$$F = - m g \frac{x}{L}$$

$$F = - k x$$

Por consiguiente, para desplazamientos pequeños la fuerza restauradora es proporcional a la elongación y su sentido es opuesto a éste, siendo  $k = mg/L$ .

El periodo de un péndulo simple cuando la amplitud es pequeña está dada por:

$$T = 2\pi \sqrt{m/k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{mg/L}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

<sup>1</sup>  $\theta$  expresado en radianes:  $15^\circ = (\pi \cdot 15/180) = 0.26180$  rad; y  $\text{Sen } 15^\circ = 0.2582$  en DEG.

Nótese que el periodo es independiente de  $m$ .

Cuando la amplitud de la oscilación no es pequeña, se puede demostrar que la ecuación general del periodo es:

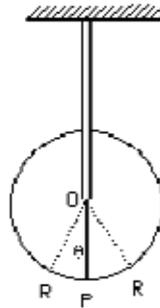
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left[ 1 + \frac{1}{2^2} \text{Sen}^2 \left( \frac{\theta_m}{2} \right) + \frac{1}{2^2} \frac{3^2}{4^2} \text{Sen}^4 \left( \frac{\theta_m}{2} \right) + \dots \right]$$

$\theta_m$  es el desplazamiento angular máximo. Cuando  $\theta_m = 15^\circ$  (separación total  $\theta = 30^\circ$ ) el periodo verdadero difiere en menos del 0.5%.

El péndulo simple proporciona un método conveniente para medir la gravedad sin realizar un experimento de caída libre, sino sólo medir el periodo y la longitud del péndulo.

## EL PENDULO DE TORSION

Supongamos un disco por un alambre fijo al centro de masas de dicho disco,



En la posición de equilibrio del disco se marca una línea radial desde su centro hasta  $P$ .

Si el disco gira en un plano horizontal hasta la posición radial  $R$ , el alambre se torcerá. El alambre ejercerá un *momento recuperador*, que tenderá a hacerle volver al punto de equilibrio (punto  $P$ ), proporcional a la elongación angular, de modo que:

$$\tau = -k'\theta$$

$k'$  es una constante que depende de las propiedades del alambre y se denomina *constante de torsión*. El signo menos indica que el momento está dirigido en sentido opuesto al movimiento angular  $\theta$ .

La ecuación  $t = -k'q$  es la condición del Movimiento Armónico Angular.

El periodo de la oscilación, por analogía y en función de la *inercia*  $I$ , con la ecuación:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k'}}$$

Recordemos que el momento de inercia viene dado por:

$$I = I_{cm} + m h^2$$

(para péndulo físico):

Disco	$I_{cm} = \frac{1}{2} m R^2$
Arillo en torno al eje	$I_{cm} = m R^2$ (eje horizontal por el centro)
Arillo respecto a cualquier Diám.	$I_{cm} = m R^2/2$ (eje vertical por el centro)
Esfera hueca	$I_{cm} = \frac{2}{3} m R^2$
Esfera sólida	$I_{cm} = \frac{2}{5} m R^2$

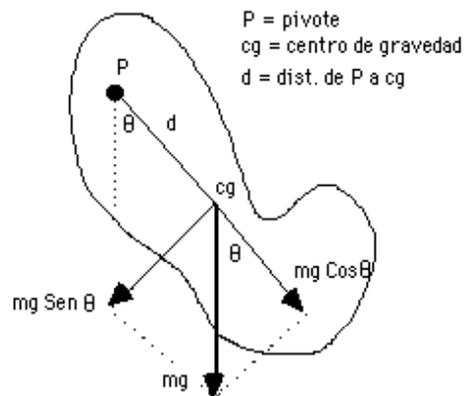
Para otros  $I_{cm}$ , ver valores en anexo (note que I en la tabla equivale a  $I_{cm}$  en la Ley de Steiner)

## EL PENDULO FISICO

Se denomina péndulo físico a cualquier péndulo real que, en contraste con el péndulo simple, *no tiene toda la masa concentrada* en un punto.

Un péndulo físico puede ser cualquier cuerpo rígido soportado de tal forma que pueda oscilar en un plano vertical en torno a algún eje que pase por uno de sus puntos.

El punto P es un pivote, que se halla separado o desplazado un ángulo  $\theta$  de su posición de equilibrio. La distancia del eje horizontal (pivote) al centro de gravedad cg, es d; el *momento de inercia* del péndulo respecto al eje de rotación es I, y la masa del péndulo es m.



el *momento recuperador* para el desplazamiento angular  $\theta$  es:

$$\tau = - m g d \text{ Sen } \theta$$

Que se debe a la *componente tangencial* de la fuerza gravitacional.

Como es proporcional al  $\text{Sen } \theta$ , en vez de serlo a  $\theta$ ; no se cumple la condición para el movimiento angular armónico simple.

Sin embargo, para desplazamientos angulares pequeños, resulta que la aproximación  $\text{Sen } \theta \approx \theta$  es, como antes una aproximación excelente, de tal manera que, para amplitudes pequeñas:

$$\tau = - m g d \theta$$

Donde:

$$k' = m g d$$

$$\tau = k' \theta$$

Por lo tanto, el periodo de un péndulo físico que oscila con una amplitud pequeña es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k'}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Cuando la amplitud es grande, el péndulo físico realiza un movimiento armónico, pero no armónico simple.

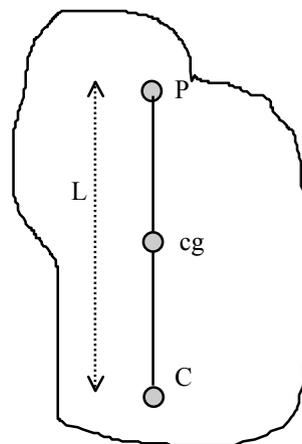
### CENTRO DE OSCILACION

Es siempre posible encontrar un *péndulo simple equivalente*, cuyo periodo sea igual al de un péndulo físico dado.

Si  $L$  es la longitud del péndulo simple equivalente:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$L = \frac{I}{md}$$



P = pivote

C = centro de oscilación

En lo que se refiere al periodo de oscilación, se puede considerar que la *masa de un péndulo físico* está concentrada en un punto cuya distancia al pivote es  $L = I/md$ . Este punto se denomina *centro de oscilación* del péndulo físico.

Las ecuaciones del M.A.S. pueden deducirse también por un método geométrico.

**SUPERPOSICION DE DOS M.A.S.: IGUAL DIRECCION Y FRECUENCIA**

Consideraremos ahora la superposición, o interferencia de dos movimientos armónicos simples que producen un desplazamiento de la partícula a lo largo de la misma línea.

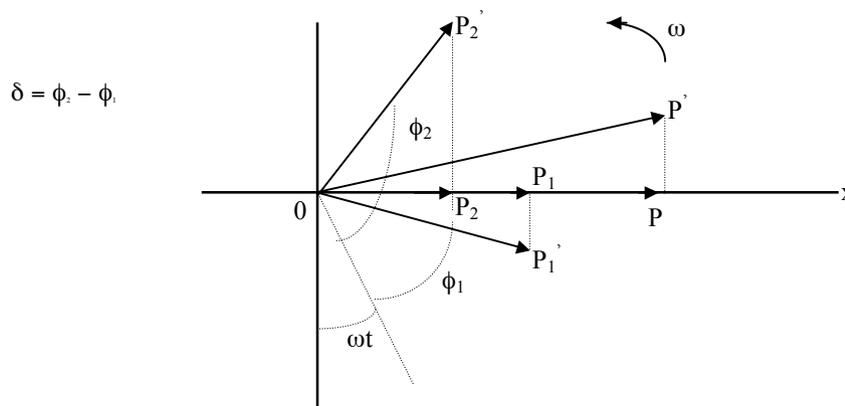
Veamos primero el caso en que ambos tienen la misma frecuencia que viajan en la misma dirección. Las ecuaciones de las dos ondas serán:

$$x_1 = OP_1 = A_1 \text{Sen}(\omega t + \phi_1)$$

$$x_2 = OP_2 = A_2 \text{Sen}(\omega t + \phi_2)$$

El desplazamiento resultante de la partícula está dado por:

$$x = OP = x_1 + x_2 = A_1 \text{Sen}(\omega t + \phi_1) + A_2 \text{Sen}(\omega t + \phi_2)$$



El ángulo entre  $OP'_1$  y  $OP'_2$  tiene el valor fijo  $\delta = \phi_2 - \phi_1$  y el vector  $OP'$  tiene una magnitud constante  $A$ , y rota también alrededor de  $0$  con una velocidad angular  $\omega$ .

Por consiguiente el vector rotante  $OP'$  genera un movimiento armónico simple de frecuencia angular  $\omega$ , y podemos escribir  $X = OP'$ .

$$x = A \text{Sen}(\omega t + \phi)$$

De la ecuación:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \text{Sen}(\omega t + \phi_1) + A_2 \text{Sen}(\omega t + \phi_2)$$

La amplitud resultante  $A$ , podemos calcularla aplicando la ley de los cosenos al vector resultante de los dos vectores:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \text{Cos } \delta}$$

La fase inicial puede encontrarse, por la ley de adición de vectores tenemos:

$$A \text{Cos } \phi = A_1 \text{Cos } \phi_1 + A_2 \text{Cos } \phi_2$$

$$A \text{Sen } \phi = A_1 \text{Sen } \phi_1 + A_2 \text{Sen } \phi_2$$

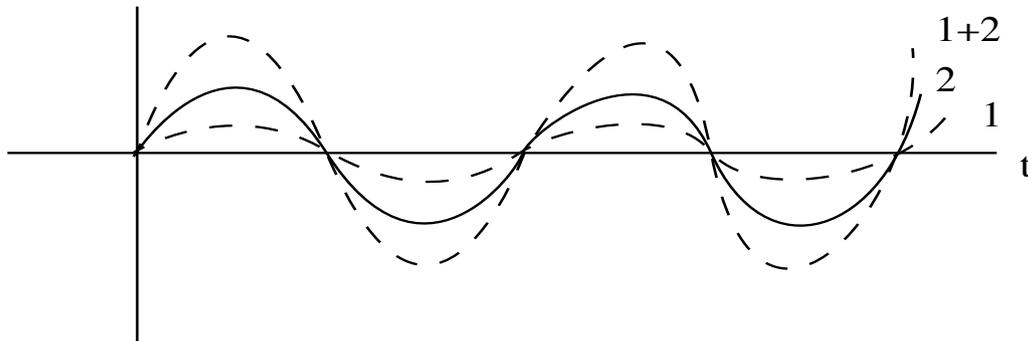
Dividiendo tenemos:

$$\tan \varnothing = \frac{A_1 \text{ Sen } \varnothing_1 + A_2 \text{ Sen } \varnothing_2}{A_1 \text{ Cos } \varnothing_1 + A_2 \text{ Cos } \varnothing_2}$$

Consideremos ahora algunos casos importantes muy especiales.

Si  $\phi_2 = \phi_1$ , entonces  $\delta=0$ , y decimos que los dos movimientos están en fase. Sus vectores rotantes son paralelos y tendremos que:

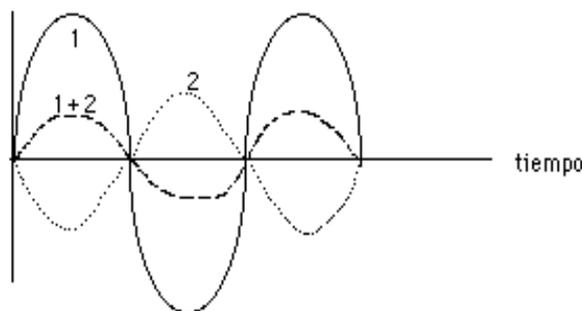
$$A = A_1 + A_2 ; \quad \phi_2 = \phi_1$$



Por consiguiente, los dos movimientos armónicos simples interfieren constructivamente ya que sus amplitudes se suman.

Si  $\phi_2 = \phi_1 + \pi$ , entonces  $\delta = \pi$  y decimos que los dos movimientos armónicos simples están en oposición. Sus vectores rotantes son antiparalelos y si por ejemplo  $A_1 > A_2$ .

$$A = A_1 - A_2 ; \quad \phi = \phi_1$$



y los dos movimientos armónicos simples interfieren atenuándose ya que sus amplitud se sustraen.

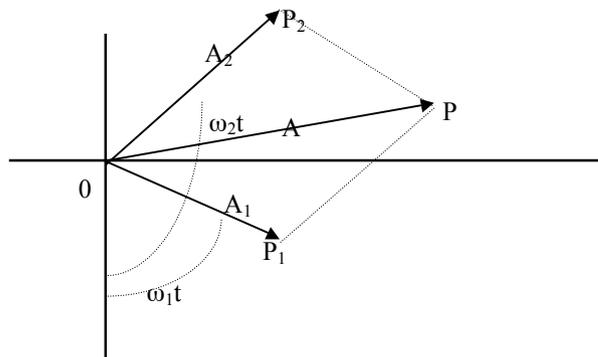
### SUPERPOSICION DE DOS M.A.S.: IGUAL DIRECCION Y DIFERENTE FRECUENCIA

El caso en el cual dos movimientos armónicos simples en la misma dirección pero con diferente frecuencia interfieren también tiene importancia.

Consideremos por simplicidad, el caso en el cual  $\phi_1 = 0$  y  $\phi_2 = 0$ ; entonces los movimientos están descritos por las ecuaciones:

$$x_1 = A_1 \text{ Sen } \omega_1 t$$

$$x_2 = A_2 \text{ Sen} \omega_2 t$$



El ángulo entre los vectores rotantes  $OP_2$  y  $OP_1$  es ahora:

$$\omega_1 t - \omega_2 t = (\omega_1 - \omega_2)t$$

y no es constante.

Por ello, el vector resultante  $OP$  no tiene longitud constante y no rota con velocidad angular constante. En consecuencia, el movimiento resultante,  $x = x_1 + x_2$  no es armónico simple.

Sin embargo, como observamos en la figura anterior, la amplitud del movimiento es:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \text{ Cos}(\omega_1 - \omega_2)t}$$

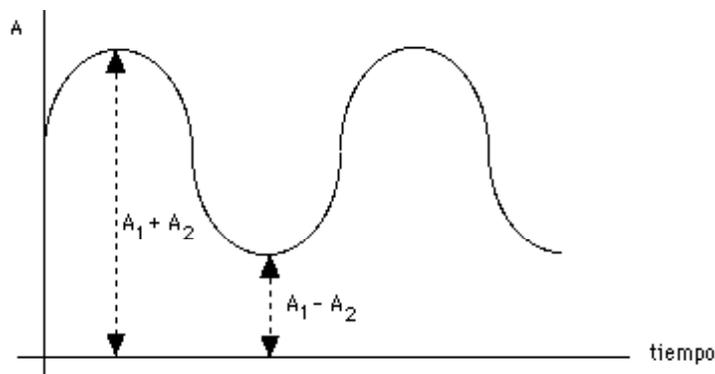
y oscila entre los valores  $A = A_1 + A_2$  [cuando  $(\omega_1 - \omega_2)\tau = 2\nu\pi$ ]  $\psi$   $A = |A_1 - A_2|$  [cuando  $(\omega_1 - \omega_2)\tau = 2\nu\pi + \pi$ ]. Se dice entonces que la amplitud es modulada.

La frecuencia de la amplitud de oscilación se expresa por:

$$f = \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2\pi} = f_1 - f_2$$

Y es igual a la diferencia de las frecuencias de los movimientos que interfieren.

En la siguiente figura vemos como varía la amplitud  $A$  con el tiempo.



**SUPERPOSICION DE DOS M.A.S.: DIRECCIONES PERPENDICULARES**

A menudo una partícula está sujeta a dos movimientos armónicos simples lineales perpendiculares entre sí. El movimiento resultante es la suma de las dos oscilaciones independientes.

Consideremos primero el caso en el cual la frecuencia de las vibraciones es la misma; es decir, cuando:

$$x = A_x \text{ Sen } (\omega t + \phi_x),$$

$$y = A_y \text{ Sen } (\omega t + \phi_y)$$

Sin embargo los movimientos x e y tiene diferentes amplitudes y diferentes constantes de fase.

Si las constantes de fase fuesen las mismas, tales que  $\phi_x = \phi_y = \phi$  ( $\delta=0$ ), el movimiento resultante sería una línea recta.

Esto podemos demostrar analíticamente, ya que si eliminamos a t de las ecuaciones:

$$x = A_x \text{ Sen } (\omega t + \phi_x) \quad y = A_y \text{ Sen } (\omega t + \phi_y)$$

Dividiendo ambas ecuaciones, ya que  $\phi_x = \phi_y = \phi$

$$\frac{y}{x} = \frac{A_y \text{ Sen } (\omega t + \phi_y)}{A_x \text{ Sen } (\omega t + \phi_x)}$$

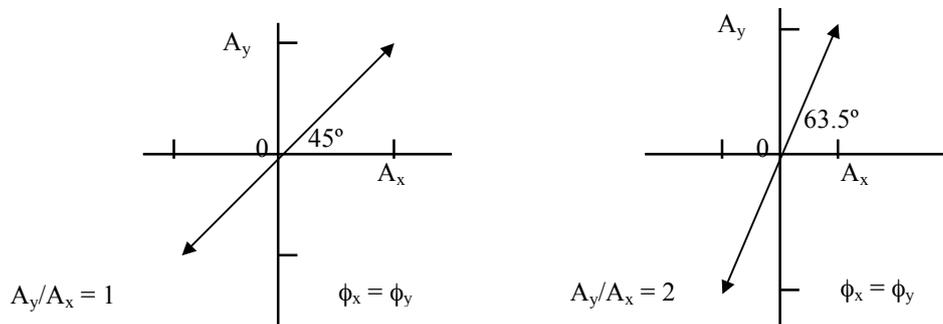
de donde:

$$y = \frac{A_y}{A_x} x$$

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2$$

Esta es la ecuación de una línea recta, cuya pendiente es  $A_y/A_x$  y el movimiento que resulta es armónico simple.

A continuación mostramos el movimiento resultante para dos casos  $A_y/A_x = 1$  y  $A_y/A_x=2$ , cuando  $\phi_x = \phi_y$ .



En estos casos, los desplazamientos x e y alcanzan un máximo al mismo tiempo y un mínimo también al mismo tiempo. Por lo tanto están en fase.

Si las constantes de fase fuesen diferentes, el movimiento resultante no sería una línea recta.

Por ejemplo, si las constantes de fase difieren en  $\pi/2$  ( $\delta = \pi/2$ ), el desplazamiento x máximo ocurriría cuando el desplazamiento y es cero y viceversa:

$$y = A_Y \text{ Sen } (\omega t + \pi/2) = A_Y \text{ Cos } \omega t$$

Combinada con la ecuación:

$$x = A_X \text{ Sen } \omega t$$

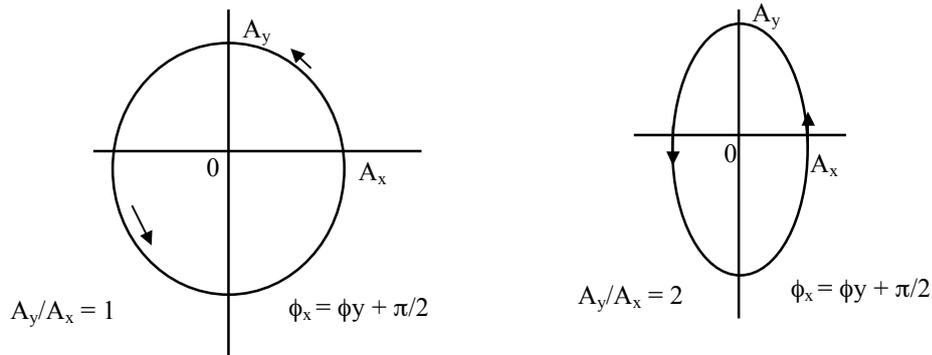
Obtenemos:

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1$$

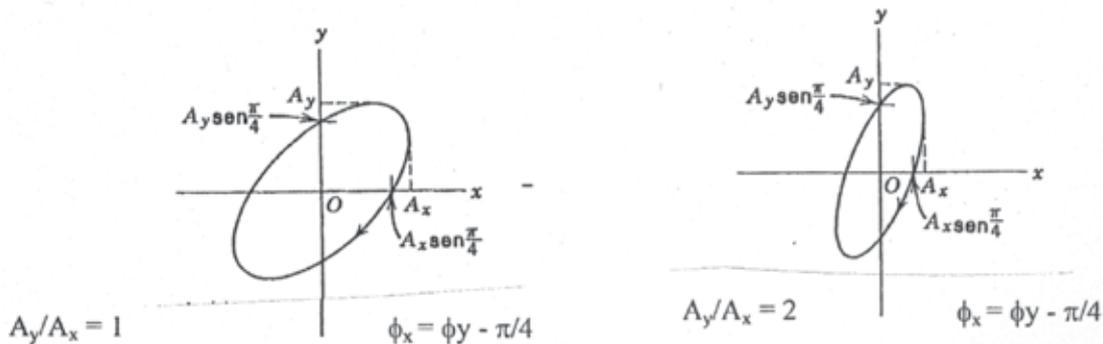
Que es la ecuación de una elipse. Si las amplitudes son iguales ( $A_Y/A_X=1$ ), el movimiento resultante es circular:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Para:  $\phi_X = \phi_Y + \pi/2$ :



Los casos para  $A_Y/A_X=1$  y  $A_Y/A_X=2$ , para  $\phi_X = \phi_Y - \pi/4$ , se muestran a continuación:



Todas las combinaciones posibles de dos movimientos armónicos simples perpendiculares entre sí y con la misma frecuencia corresponden a trayectorias elípticas, siendo el círculo y la línea recta casos especiales de una elipse.

La forma de la elipse depende solamente de la relación entre las amplitudes  $A_Y/A_X$  y de la diferencia en fase entre dos oscilaciones  $\phi_X - \phi_Y$ .

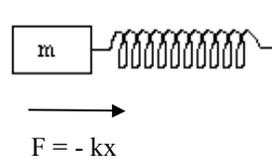
El movimiento real puede ser en el sentido de la manecillas de un reloj o en sentido contrario a él, dependiendo de cual componente se adelante en la fase.

Una manera sencilla de producir dichas trayectorias es por medio de un osciloscopio. En él, los electrones se deflectan por medio de dos campos eléctricos perpendiculares entre sí. La intensidad de los campos alterna sinusoidalmente con la misma frecuencia, pero sus fases y amplitudes pueden variarse. De esta manera se puede hacer que los electrones tracen sobre una pantalla fluorescente las diferentes trayectorias.

Si dos oscilaciones de diferente frecuencia se combinan perpendicularmente entre sí, el movimiento resultante es más complicado. El movimiento no es ni siquiera periódico, a menos que las frecuencias de las dos componentes  $\omega_1$  y  $\omega_2$  estén en relación de dos números enteros. (figuras de Lissajous).

## OSCILACIONES DE DOS CUERPOS

Recordemos que teníamos como un ejemplo de un oscilador armónico simple, una masa fija a un resorte y éste a una pared.  $k$  es la constante elástica del resorte.



La pared está conectada rígidamente a la tierra, de tal forma que este sistema es, en realidad, un sistema de dos cuerpos, conectados mediante un resorte, y en el que uno de los dos cuerpos tiene una masa infinita.

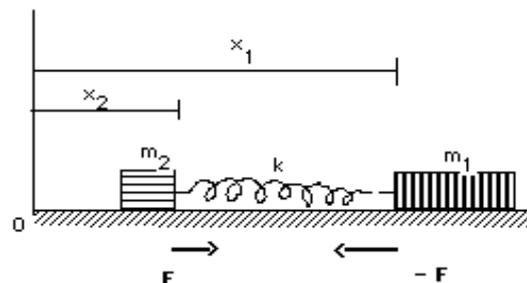
La extensión del resorte (longitud) queda determinada sólo por el movimiento de la masa  $m$ .

En la naturaleza ocurren, a menudo, sistemas oscilantes de dos cuerpos en los que no se puede considerar que una de las masas es infinita.

Algunos ejemplos lo constituyen las moléculas diatómicas tales como el  $H_2$ ,  $CO$ ,  $HCl$ , etc., que pueden oscilar a lo largo de su eje de simetría. El acoplamiento entre los átomos que constituyen a estas moléculas es electromagnético, pero podemos imaginar, para nuestros propósitos que están conectados por pequeños resortes sin masa.

Un aspecto sorprendente en las oscilaciones de los sistemas de dos cuerpos, es que las oscilaciones todavía pueden describirse con las mismas ecuaciones que se obtuvieron para el sistema de un cuerpo simplemente redefiniendo términos e introduciendo un nuevo concepto (el de *la masa reducida*). A continuación lo demostraremos.

Consideremos dos cuerpos  $m_1$  y  $m_2$  conectados mediante un resorte (sin masa) de constante  $k$ ; el sistema puede oscilar en una superficie horizontal sin fricción.



Los extremos del resorte se localizan con las coordenadas  $x_{1(t)}$  y  $x_{2(t)}$ , tal como se muestra.

La longitud del resorte en un instante dado es  $x_1 - x_2$ . Si la longitud normal relajada es  $L$ , el cambio en la longitud  $x(t)$  del resorte queda determinado por:

$$x = (x_1 - x_2) - L$$

Longitud en cualquier instante =  $x_1 - x_2$

Longitud del resorte relajada =  $L$

Cambio en la longitud =  $x = (x_1 - x_2) - L$

Si:

$x > 0$ (x es +)	el resorte está estirado,
$x = 0$	el resorte está relajado,
$x < 0$ (x es -)	el resorte está comprimido.

La fuerza  $F$  que ejerce sobre la masa  $m_2$  es idéntica a la ejercida sobre  $m_1$ , pero de sentido contrario.

Aplicando la segunda ley de Newton ( $F = ma$ ) a las masas  $m_1$  y  $m_2$ :

$$F = -kx$$

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = +kx$$

Multiplicando la primera ecuación por  $m_2$  y la segunda por  $m_1$  y restándolas, obtenemos:

$$m_1 m_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx m_2$$

$$m_1 m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = +kx m_1$$

$$m_1 m_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - m_1 m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -kx m_2 - kx m_1$$

que puede escribirse como:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 (x_1 - x_2)}{dt^2} = -kx$$

Llamemos *masa reducida* del sistema a la cantidad que tiene dimensiones de masa, y representémosla por el símbolo  $\mu$ , es decir:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Como  $L$  es constante:

$$\frac{d^2 (x_1 - x_2)}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

ya que:

$$x = (x_1 - x_2) - L$$

y entonces:

$$\mu \frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} = -k x; \quad \mu \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{\mu} x = 0$$

Esta ecuación tiene una forma idéntica a la ecuación:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

que se obtuvo para la oscilación del cuerpo único.

Las diferencias son:

1. la  $x$  en la ecuación:  $d^2x/dt^2 + (k/m)x = 0$  es el desplazamiento relativo de los dos cuerpos respecto de su posición de equilibrio, y
1. la  $\mu$  es la masa reducida de la pareja de cuerpos, en vez de ser la masa de un solo cuerpo.

De la ecuación:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

podemos escribir:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

nótese que  $\mu$  siempre es menor que  $m_1$  o  $m_2$  (para masas finitas); de ahí su nombre de masa reducida.

Siguiendo los mismos pasos que antes, obtenemos:

para un sólo cuerpo

$$\begin{aligned} x &= A \text{ Sen}(wt + \phi) \\ v &= \omega A \text{ Cos}(wt + \phi) \\ a &= -\omega^2 A \text{ Sen}(wt + \phi) \end{aligned}$$

para dos cuerpos oscilantes

$$\begin{aligned} x &= A \text{ Cos } wt \\ v &= -\omega A \text{ Sen } wt \\ a &= -\omega^2 A \text{ Cos } wt \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} x &= (x_1 - x_2) - L \\ v &= v_1 - v_2 \\ a &= a_1 - a_2 \end{aligned}$$

## EL MOVIMIENTO ARMONICO AMORTIGUADO

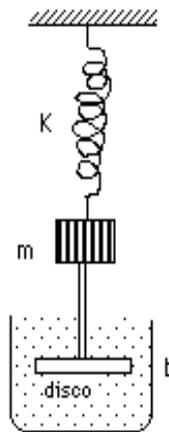
Hasta ahora hemos supuesto que sobre el oscilador no actúan fuerzas de fricción. Si esto fuese cierto, un péndulo oscilaría indefinidamente.

En la realidad, la amplitud de la oscilación disminuye poco a poco hasta ser cero, como resultado de la fricción.

Se dice que el movimiento está amortiguado por la fricción y se llama *Movimiento Armónico Amortiguado*.

En la mayoría de los casos, la fuerza de fricción (resistencia del aire o fuerzas internas) es proporcional a la velocidad del cuerpo, pero su sentido es opuesto al de ella.

Consideremos un oscilador armónico amortiguado:



La ecuación del movimiento del oscilador armónico amortiguado queda determinada por la segunda ley de Newton ( $F=ma$ ) en la que  $F$  es la *fuerza restauradora*  $-kx$  y la fuerza de amortiguamiento es:

$$- b \, dx/dt$$

En la que  $b$  es una constante.

De aquí se obtiene:

$$F = m \, a$$

$$- k \, x - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + k \, x = 0$$

si  $b$  es *pequeña*, la solución de esta ecuación diferencial es:

$$x = A e^{-\left(\frac{b}{2m}t\right)} \text{Cos}(\omega' t + \emptyset)$$

Donde:

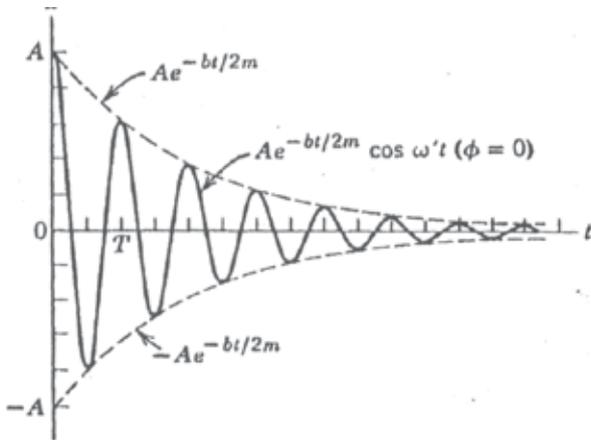
$$\omega' = 2 \pi f$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Cuando existe fricción, la frecuencia es menor y el periodo mayor. La fricción hace mas lento al movimiento.

Si no hubiera fricción,  $b$  sería igual a cero: y  $2\pi\phi = \sqrt{k/m}$ , que es la ecuación de la frecuencia angular del movimiento sin amortiguación.

En el movimiento armónico amortiguado, la energía del oscilador es disipada poco a poco por la fricción y tiende al valor cero conforme transcurre el tiempo.



El movimiento armónico amortiguado como función del tiempo. El movimiento es oscilatorio, con una amplitud que disminuye continuamente. La amplitud(---) parte de un valor  $A$  y disminuye exponencialmente a cero conforme  $t \rightarrow \infty$

El tiempo de vida promedio de la oscilación  $\tau$  es:

$$\tau = \frac{2m}{b}$$

$$A = A_0 e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t}$$

Si:  $b = 0$

$$t \rightarrow \infty$$

$$A \rightarrow A \approx \text{constante}$$

## OSCILACIONES FORZADAS Y RESONANCIA

Hasta ahora sólo se han discutido las oscilaciones naturales de un cuerpo, es decir las oscilaciones que ocurren cuando un cuerpo es desplazado de su posición de equilibrio y después se lo suelta. En una masa unida a un resorte, la frecuencia natural cuando no hay fricción es:

y en presencia de una fuerza de fricción pequeña:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega' = 2\pi f' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Sin embargo, se presenta una situación diferente cuando un cuerpo está sometido a la acción de una *fuerza oscilatoria externa*.

Las oscilaciones resultantes reciben el nombre de *oscilaciones forzadas*. Tales oscilaciones forzadas tienen la frecuencia de la *fuerza externa* y *no la frecuencia natural del cuerpo*.

La ecuación del movimiento de un oscilador forzado se obtiene de la segunda ley del movimiento. Además de la fuerza restauradora  $-kx$  y de la fuerza de amortiguamiento  $-b dx/dt$ , existe también la fuerza oscilatoria aplicada desde el exterior.

Por simplicidad consideremos que la expresión de esta fuerza es:

$$F = F_m \cos \omega'' t$$

donde  $F_m$  es el valor máximo de la fuerza externa. La frecuencia angular es:

$$\omega'' = 2\pi f''$$

A partir de:

$$F = m a$$

$$-kx - b \frac{dx}{dt} + F_m \cos \omega'' t = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Ordenando:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_m \cos \omega'' t$$

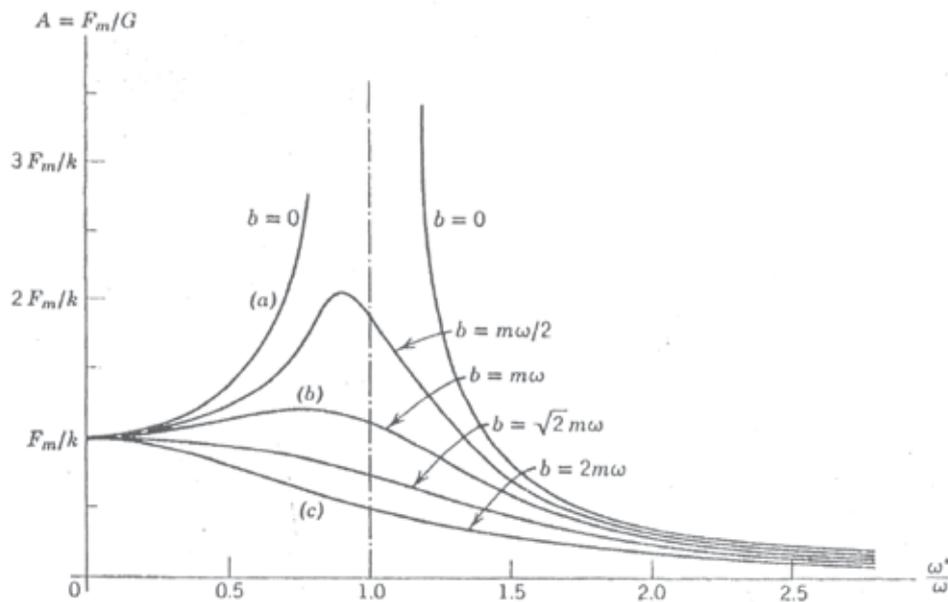
La solución a esta ecuación es:

$$x = \frac{F_m}{G} \text{Sen}(\omega'' t - \emptyset)$$

donde:

$$G = \sqrt{m^2(\omega''^2 - \omega^2) + b^2 \omega''^2}$$

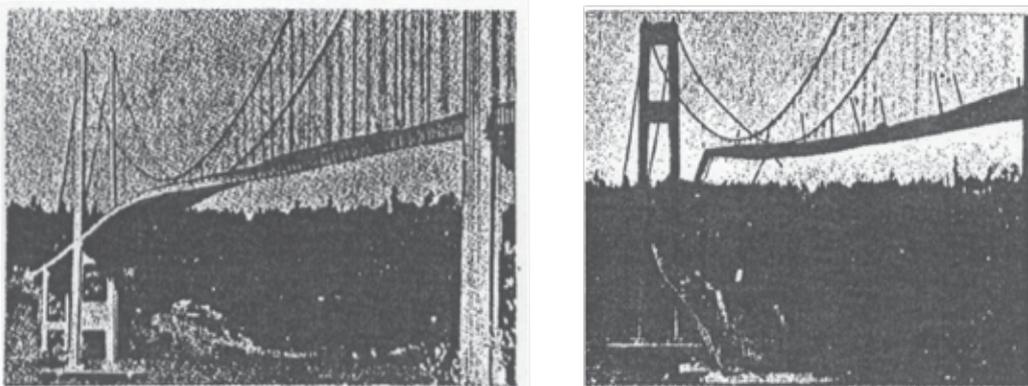
$$\emptyset = \text{ArcCos}\left(\frac{b\omega''}{G}\right)$$



$\omega''$  = frecuencia impulsora  
 $\omega$  = frecuencia natural no amortiguada

Cuando  $b=0$  la amplitud se vuelve indefinida cuando  $\omega = \omega''$  debido a que la fuerza plicada está suministrando energía al sistema en forma continua, que no se disipa.

Un conjunto de soldados que marchan sobre un puente, pueden hacer que éste vibre con una amplitud destructiva, si ocurre que la frecuencia de sus pasos coinciden con alguna frecuencia natural del puente. Es es la razón por la que los soldados rompen marcha al pasar un puente.



El primero de julio de 1940 se terminó el Tacoma Narrows en Puget Spund, Washington, y se abrió el tráfico. Tan solo cuatro meses después, un ventarrón moderado puso al puente en oscilación, hasta romper al tramo principal, que se desprendió de los cables y cayó al agua, El viento produjo una fuerza resultante cuyas fluctuaciones entraron en resonancia con la frecuencia natural de la estructura. esto provocó un aumento continuo en la aplitud, hasta destruir al puente. Después de este accidente, se rediseñaron muchos otros puentes para hacerlos aerodinámicamente estables.

CAPITULO II

ELASTICIDAD

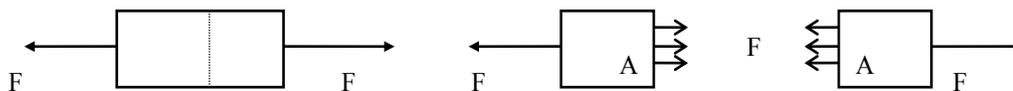
FATIGA

En física I, hemos estudiado el movimiento de un cuerpo rígido, pero habíamos considerado que los cambios de forma del cuerpo eran tan pequeños que no los habíamos tenido en cuenta.

Las sustancias reales, sin embargo, siempre son algo sensibles a la influencia de las fuerzas aplicadas, de modo que vamos a desarrollar modelos que permitan describir la relación entre la deformación de las sustancias reales y las fuerzas que producen estas deformaciones.

En éste capítulo nos limitaremos a considerar magnitudes que son directamente medibles, sin intentar ninguna explicación molecular detallada del comportamiento observado.

Consideremos una barra de sección recta  $A$  uniforme, y sometida en sus extremos a tracciones iguales y opuestas  $F$ .



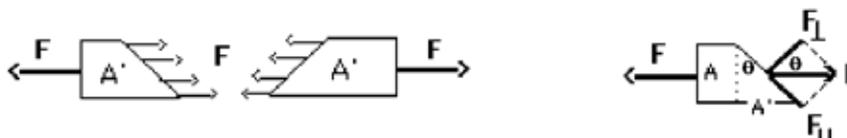
Vemos que la barra está sometida a una *tensión*. Puesto que cualquier porción de la barra se encuentra en equilibrio, la parte situada a la derecha de dicha sección ha de tirar de la parte izquierda con una fuerza  $F$ , y viceversa.

La *fatiga*  $S$  en la sección se define como la razón de la fuerza  $F$  al área  $A$ :

$$Fatiga = \frac{F}{A}$$

La fatiga se denomina *tensora*, lo que significa que cada parte tira de la otra., y se denomina también *normal*, porque la fuerza distribuida es perpendicular a la superficie. Unidades de fatiga son:  $N/m^2$ ,  $dina/cm^2$ , etc.

Consideremos ahora una sección de la barra en un dirección arbitraria:



Ahora la fuerza está distribuida sobre un área  $A'$  mayor y no es perpendicular a la sección. Si representamos por un solo vector de módulo  $F$  la resultante de las fuerzas distribuidas, este vector puede descomponerse en una componente normal a la superficie  $A'$ , y en otra componente tangencial a la misma.

La fatiga *normal* se define, igual que antes, como la razón de la componente perpendicular al área  $A'$ .

La relación de la componente paralela al área  $A'$  se denomina *fatiga tangencial* o *fatiga cortante*:

$$\text{Fatiga normal} = \frac{\text{Fuerza perpendicular}}{A'} = \frac{F}{A'}$$

$$\text{Fatiga cortante} = \frac{\text{Fuerza paralela}}{A'} = \frac{F_{\parallel}}{A'}$$

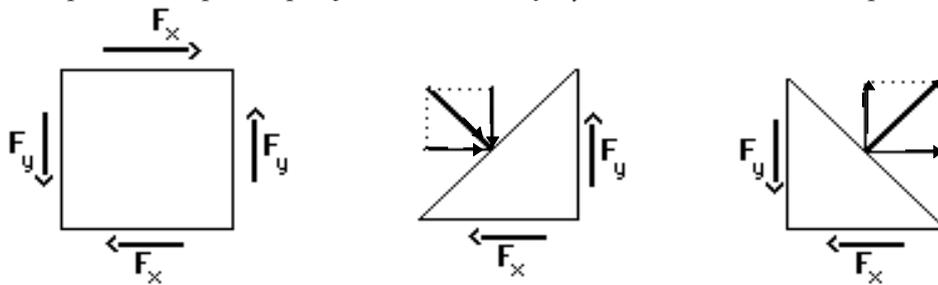
La fatiga no es una magnitud vectorial, ya que, a diferencia de la fuerza, no puede asignársele una dirección específica. La fatiga pertenece al tipo de magnitudes físicas denominadas tensores.

Una barra sujeta a *empujes* en sus extremos, se dice que está sometida a *compresión*.



La fatiga es también una fatiga normal, pero ahora es *compresora*.

Consideremos ahora un bloque de sección cuadrada, sometido a una fatiga. Sobre el bloque actúan dos pares iguales y opuestos producidos por las parejas de fuerzas  $F_x$  y  $F_y$  distribuidas sobre sus superficies.



El bloque en conjunto se encuentra en equilibrio, y cualquier parte de él está así mismo en equilibrio.

Así las fuerzas distribuidas sobre las partes diagonales han de tener una resultante  $F$  cuyas componentes serán  $F_x$  y  $F_y$ .

Las fatigas son por tanto compresión y tensión puras, aunque en la base tengamos todavía tensiones cortantes.

## DEFORMACIÓN UNITARIA

La expresión *deformación unitaria* se refiere a la variación relativa de la forma o dimensiones de un cuerpo sometido a fatiga.

A cada clase de fatiga descrita en la sección precedente corresponde un tipo de deformación unitaria.

Si representamos una barra de longitud  $L_0$  y que se alarga hasta  $L$  cuando se ejercen tracciones iguales y opuestas en sus extremos.



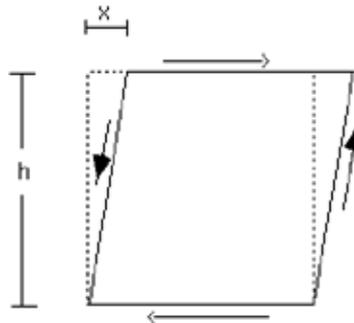
El alargamiento no tiene lugar sólo en los extremos, sino que cada elemento se alarga en la misma proporción que lo hace la barra entera.

La *deformación unitaria por tensión* de la barra se define como la razón del aumento de longitud a la longitud inicial:

$$\text{Deformación unitaria} = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0}$$

De la misma manera la deformación unitaria por compresión se define como la razón de la disminución de longitud a la longitud inicial.

Cuando actúan fatigas cortantes sobre las caras de un bloque, la deformación unitaria correspondiente se denomina *deformación unitaria cortante*, y se define como la razón del desplazamiento de un vértice a la dimensión transversal respectiva:



$$\text{Deformación unitaria cortante} = \frac{x}{h}$$

Al igual que los otros tipos de deformación unitaria, la deformación unitaria cortante es un número abstracto.

Finalmente la deformación unitaria producida por una presión hidrostática, o *deformación unitaria por unidad de volumen*, se define como la razón del cambio de volumen  $\Delta V$  al volumen inicial  $V$ , y es también un número abstracto.

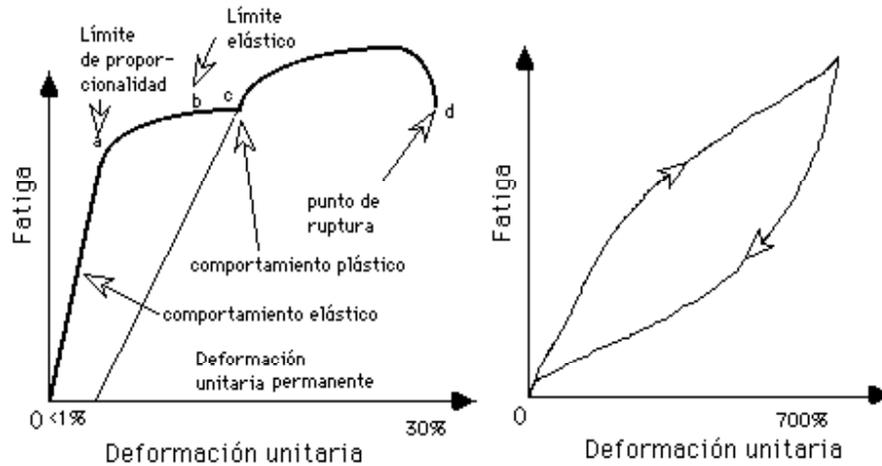
$$\text{Deformación unitaria por unidad de volumen} = \frac{\Delta V}{V}$$

## ELASTICIDAD Y PLASTICIDAD

La relación existente entre cada uno de los tres tipos de fatiga y su correspondiente deformación unitaria desempeña importante papel en la rama de la física denominada *teoría de la elasticidad*, o en su homóloga técnica, la *resistencia de materiales*.

Dos de los materiales más importantes actualmente en la ciencia y en la técnica son el metal y el caucho vulcanizado.

Existen muchas variaciones en el comportamiento elástico de los metales. La siguiente figura muestra un diagrama típico para un metal dúctil.



La fatiga es de tipo tensor y la deformación unitaria es el porcentaje de alargamiento.

Durante la primera parte de la curva (hasta una deformación inferior al 1%), la fatiga y la deformación unitaria son proporcionales, hasta el punto *a*, conocido con el nombre de *límite de proporcionalidad*. Este hecho en el que haya una región en la cual la fatiga y la deformación unitaria son proporcionales se denomina *ley de Hooke*.

De *a* a *b*, la fatiga y la deformación unitaria ya no son proporcionales, sin embargo si se suprime la carga en cualquier punto comprendido en *0* y *b*, la *curva es recorrida hacia atrás* y el material puede recuperar su longitud inicial.

Entre los puntos *0* y *b*, se dice que el material es *elástico*, o que presenta comportamiento elástico, y el punto *b* se denomina *límite elástico*.

Si se sigue cargando el material, la deformación unitaria aumenta rápidamente y, al suprimir la carga en un punto situado más allá de *b*, por ejemplo el punto *c*, el material *no recupera su longitud inicial*, sino que recorre la línea de trazos. A partir de este punto se dice que el material tiene *deformación permanente*.

Un incremento de la carga más allá de *c* origina un gran aumento de la deformación unitaria, hasta que se alcanza el punto *d*, donde tiene lugar *la ruptura*. De *b* a *d* se dice que el metal experimenta *deformación plástica*.

Si entre el límite elástico (*b*) y el punto de ruptura (*d*) tiene lugar una gran deformación plástica, el metal se llama *dúctil*, mientras que si la ruptura ocurre poco después del límite elástico, el metal se denomina *frágil*.

En la figura anterior (a la derecha) representamos una curva fatiga - deformación unitaria para una muestra típica de *caucho vulcanizado* estirada más de siete veces su longitud inicial.

En ninguna parte de esta curva es la fatiga proporcional a la deformación unitaria. Sin embargo, la sustancia es elástica en el sentido de que, cuando se suprime la carga, la curva fatiga deformación unitaria *no* es recorrida en sentido contrario, sino que sigue la curva de trazos.

La falta de coincidencia de las curvas que corresponden, respectivamente, a las fatigas creciente y decreciente se denomina *histéresis elástica*. (histéresis magnética en las sustancias magnéticas).

El trabajo realizado sobre el material para deformarlo es siempre mayor al trabajo recuperado en el retorno.

La gran histéresis elástica de algunos tipos de gomas hace que estos materiales sean muy adecuados para absorber vibraciones.

Si se coloca por ejemplo un bloque de goma dura entre una pieza de una máquina vibrante y el suelo, durante cada ciclo de vibración tiene lugar histéresis elástica. La energía mecánica se convierte en una forma denominada energía interna, lo que pone de manifiesto una elevación de temperatura. El resultado, sólo una pequeña cantidad de energía vibrante se transmite al suelo.

La fatiga necesaria para producir la ruptura real de un material se denomina *fatiga de ruptura*.

## MODULO DE ESLASTICIDAD

La fatiga necesaria para producir una deformación unitaria dada depende de la naturaleza del material de que se trate.

La razón de la fatiga a la deformación unitaria, o sea la fatiga por deformación unitaria unidad, se denomina *módulo de elasticidad* del material.

Cuanto mayor es el módulo de elasticidad, tanto mayor es la fatiga necesaria para producir una deformación unitaria dada.

Consideremos en primer lugar fatigas y deformaciones unitarias longitudinales (tensoras o compresoras). La experiencia demuestra que, hasta el límite de proporcionalidad, una fatiga longitudinal determinada produce una deformación unitaria, que es siempre la misma.

Por consiguiente, para un material dado, la razón de la fatiga tensora a la deformación unitaria por tensión es igual a la razón de la fatiga compresora a la deformación unitaria por compresión.

Esta razón se denomina *Módulo de Young* del material:

$$Y = \frac{\textit{fatiga tensora}}{\textit{Deform. Unit. por tension}}$$

$$Y = \frac{\textit{fatiga compresora}}{\textit{Deform. Unit. por compresion}}$$

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L_0}$$

Si no se sobrepasa el límite de proporcionalidad, la razón de la fatiga a la deformación unitaria es constante, y la ley de Hooke equivale, por tanto, a decir que: *dentro del límite de proporcionalidad, el módulo de elasticidad de un material dado es constante*, dependiendo solamente del tipo de material.

Las unidades del módulo de Young son las mismas que las de la fatiga, fuerza por unidad de área.

Cuando se alarga un material por acción de una fatiga tensora, las dimensiones perpendiculares a la dirección de la fatiga se acortan en proporción al cambio relativo de longitud. Si  $w$  es la anchura inicial y  $\Delta w$  el cambio de anchura, entonces:

$$\frac{\Delta w}{w} = -\sigma \frac{\Delta L}{L}$$

Donde  $\sigma$  es una constante adimensional característica del material denominado *Coefficiente de Poisson*.

Para muchos materiales,  $\sigma$  tiene un valor comprendido entre 0,1 y 0,3. Análogamente, un material sometido a fatiga compresora se "abomba" lateralmente o *pandea*, y el cambio relativo viene dado por la misma ecuación.

Dentro de la región en que se cumple la ley de Hooke, se define el *Módulo de Rigidez S*, de un material como la razón de una fatiga cortante a la deformación unitaria cortante que produce:

$$S = \frac{\text{fatiga cortante}}{\text{Deform. Unit. cortante}}$$

$$S = \frac{F/A}{x/h} = \frac{h}{A} \frac{F}{x}$$

El módulo de rigidez de un material se expresa también como una fuerza por unidad de área. Para la mayoría de los materiales este módulo es igual a la mitad o a un tercio del de Young. Al módulo de *rigidez* se le denomina también como el *Módulo de Torsión*.

La definición más general del módulo de rigidez es:

$$S = \frac{dF/A}{dx/h} = \frac{h}{A} \frac{dF}{dx}$$

donde  $dx$  es el aumento de  $x$  cuando la fuerza cortante aumenta en  $dF$ .

El módulo de rigidez solo tiene significado para los materiales sólidos. Un líquido o un gas no pueden soportar *permanentemente* una fatiga cortante, y fluyen bajo la acción de la misma.

El módulo que relaciona una presión hidrostática con la deformación unitaria de volumen que produce se denomina *Modulo de compresibilidad*.

El módulo de compresibilidad es la razón de un cambio de presión a la deformación unitaria de volumen producida:

$$\beta' = -\frac{dP}{dV/V} = -V \frac{dP}{dV}$$

El signo menos se incluye porque *un aumento* de presión causa siempre una *disminución* de volumen.

El cambio de volumen de un sólido o un líquido sometido a presión es tan pequeño que el volumen  $V$  puede considerarse constante. Siempre que la presión no sea demasiada grande, el módulo de compresibilidad de un sólido o un líquido es considerado constante. Por el contrario el volumen de un gas cambia notablemente con la presión.

El valor inverso del módulo de compresibilidad se denomina *coeficiente de compresibilidad*:

:

$$\beta = \frac{1}{\beta'} = - \frac{dV/V}{dP} = - \frac{1}{V} \frac{dV}{dP}$$

El coeficiente de compresibilidad de una sustancia es, pues, igual a la disminución relativa de volumen, por unidad de incremento de presión.

### CONSTANTE RECUPERADORA

Los distintos módulos de elasticidad son magnitudes que representan las propiedades elásticas de un material particular, pero no indican directamente cuánto se deforma cierta barra, cable o resorte, construido de cierto material.

De la ecuación:

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L_0}$$

$$F = \frac{YA}{L_0} \Delta L$$

o bien si se reemplaza  $\frac{YA}{L_0}$  por una sola constante  $k$  y se sustituye la elongación  $\Delta L$  por  $x$ :

$$F = k x$$

En otras palabras, el alargamiento de un cuerpo sometido a tensión, por encima de la longitud correspondiente al cuerpo descargado, es directamente proporcional a la fuerza tensora. La ley de Hooke se enunció primero en esta forma, en lugar de expresarla en función de la fatiga y de la deformación unitaria.

La constante  $k$ , o razón de la fuerza al alargamiento, se denomina *constante recuperadora* o *constante de rigidez* del resorte. Numéricamente, es igual a la fuerza necesaria para producir un alargamiento unidad.

La razón del alargamiento a la fuerza, es decir el alargamiento por unidad de fuerza, se denomina *docilidad* del resorte. Es la inversa de la constante recuperadora.

## CAPITULO III

### HIDROSTATICA

#### LOS FLUIDOS

El término hidrostática se aplica al estudio de los fluidos en reposo y la palabra hidrodinámica, al estudio de los fluidos en movimiento.

*Un fluido*, es una sustancia que puede *fluir*, de tal forma que el término *fluido* incluye a los líquidos y a los gases.

Sin embargo, tal clasificación no es tajante; algunos fluidos, como el vidrio o el alquitrán, fluyen tan lentamente que se comportan como si fuesen sólidos.

Los *plasmas*, que son *gases muy ionizados*, no se ajustan fácilmente a estas categorías y a menudo se le llama *el cuarto estado de la materia*, para distinguirlo, del estado sólido, líquido y gaseoso.

Sin embargo en este curso, definiremos a un fluido como normalmente se entiende y sólo nos interesarán aquellas propiedades de los fluidos con su habilidad para fluir.

*Un fluido* es una sustancia que se deforma continuamente cuando se somete a una *tensión de cortadura* por muy pequeña que ésta sea. (recordemos que una fuerza cortante es la componente tangencial a la superficie de la fuerza).

Los fluidos son cuerpos que cambian fácilmente su forma, no resisten fuerzas laterales.

#### LA PRESIÓN Y LA DENSIDAD

Existe una diferencia en la manera en que una fuerza superficial actúa sobre un fluido y sobre un sólido.

En un sólido no hay ninguna restricción respecto a la dirección de la fuerza, pero en *un fluido en reposo*, la *fuerza superficial debe estar siempre dirigida perpendicularmente a la superficie de dicho fluido*.

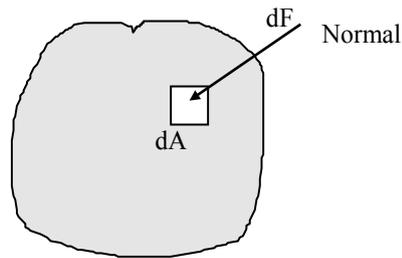
Un fluido en reposo no puede soportar una fuerza tangencial, ya que en este caso, las diferentes capas de fluido resbalarían unas sobre las otras.

Es conveniente describir las fuerza que actúa sobre una fluido especificando *la presión*.

*La presión es la fuerza normal por unidad de superficie*.

Para entender el concepto de presión, basta pensar en el efecto distinto que tiene la misma fuerza (el peso del cuerpo humano por ejemplo) que actúa cuando se apoya el cuerpo sobre una cama de 100 clavos (fakir), o sobre una cama de 1 millón de clavos (experiencia que podemos resistir hasta los no fakires). En los dos casos es distinta la superficie de apoyo y la misma fuerza produce distintas presiones.

Consideremos una superficie cerrada, conteniendo un fluido,



La presión queda definida por:

$$P = \frac{dF}{dA}$$

o en términos generales:

$$P = \frac{F}{A}$$

La presión es una cantidad escalar. Su unidad en el SI es el Pascal (Pa); 1Pa=1N/m<sup>2</sup>; otras unidades de la presión son:

$$\begin{aligned} 1 \text{ atm} &= 1.0133 \times 10^5 \text{ Pa (N/m}^2\text{)} \\ &= 14.669 \text{ lbf/plg}^2 \text{ (PSI)} \\ &= 1.033 \text{ Kg}_f\text{/cm}^2 \\ &= 760 \text{ mmHg} \\ &= 1.0133 \text{ bar} \end{aligned}$$

Una segunda magnitud conveniente para describir fluidos es *la densidad*.

*La densidad* de un fluido homogéneo, es la relación de la masa del fluido, contenido en la unidad de volumen.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

En términos más exactos:

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

La densidad de *un gas*, depende en general de la temperatura y de la presión:

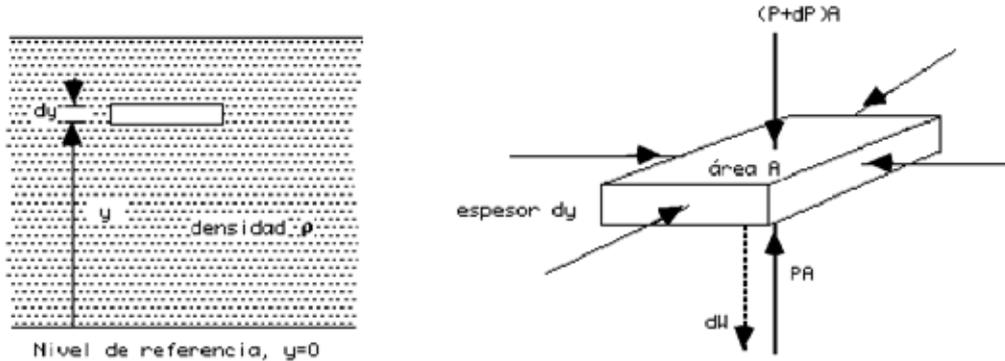
$$\rho = \rho (P, T)$$

La densidad de *los líquidos* varía muy poco en grandes intervalos de P y T, para propósitos de este curso, podremos considerarla constante.

## LA VARIACIÓN DE LA PRESIÓN EN UN FLUIDO EN REPOSO

Consideremos un pequeño elemento de volumen que está sumergido totalmente dentro de la masa del fluido.

Consideremos que el elemento es una lámina delgada de espesor  $dy$ , cuyas caras superior e inferior tienen un área  $A$ .



Si  $\rho$  es la densidad del fluido, la masa del elemento es  $\rho V$  ó  $\rho A dy$ , y su peso es  $dW = \rho g A dy$ .

Las fuerzas que ejerce el fluido que rodea al elemento son, en cada punto *perpendiculares* a su superficie.

La fuerza horizontal, resultante es cero, ya que el elemento no tiene aceleración. Las fuerzas horizontales son debidas sólo a la presión del fluido.

Por simetría la presión es la misma en todos los puntos del plano horizontal.

Las fuerzas verticales, se deben no sólo a la presión del fluido, sino también al peso del elemento.

Si  $P$  es la presión sobre la cara inferior y  $(P + dP)$  sobre la cara superior,

$$\text{fuerza hacia arriba} = PA$$

$$\text{fuerza hacia abajo} = (P+dP)A + dw$$

donde  $dw$  es el peso del elemento.

Como el elemento no tiene aceleración vertical:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$(P + dP)A + dw = PA$$

$$(P + dP)A + \rho g A dy = PA$$

$$dP = - \rho g dy$$

$$\frac{dP}{dy} = - \rho g$$

Esta ecuación indica la forma en que la presión en un fluido varía con la altura. A medida que esta altura aumenta ( $dy$  positiva) la presión decrece ( $dP$  negativa).

La cantidad  $\rho g$  se llama a menudo *peso específico* del fluido:

$$\gamma = \rho g$$

$\gamma$  es el peso específico o peso por unidad de volumen. Las unidades son:

$$\rho [=] \text{Kg}_m/\text{m}^3$$

$$\gamma [=] \text{Kg}_m/\text{m}^3$$

La densidad relativa (o gravedad específica de una sustancia se define como):

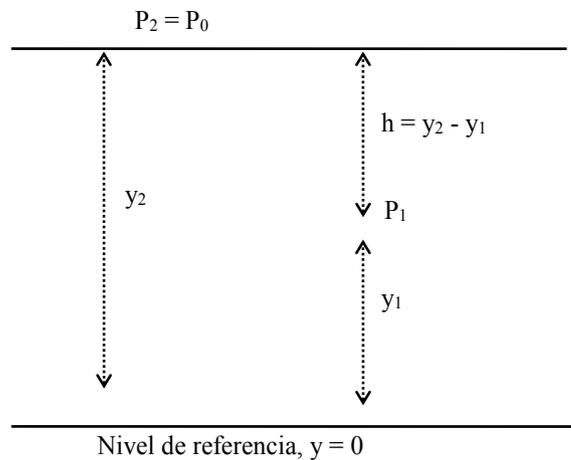
$$D.R. = \frac{\text{peso de la sustancia}}{\text{peso de igual volumen de agua}}$$

$$D.R. = \frac{\text{peso específico de la sustancia}}{\text{peso específico del agua}}$$

Ambos pesos evaluados a la misma temperatura.

Si  $P_1$  es la presión en el punto 1, correspondiente a una altura  $y_1$ ,  $P_2$  la presión en el punto 2, correspondiente a una altura  $y_2$  sobre un determinado nivel de referencia, podemos integrar la ecuación:

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g$$



En los líquidos,  $\rho$  es prácticamente constante ya que los líquidos son prácticamente incompresibles y las diferencias de nivel ( $y_2 - y_1$ ) rara vez son tan grandes como para que se tengan que considerar cambios en  $g$ .

Tomando  $g$  y  $\rho$  constantes:

$$P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$$

Si un líquido tiene una superficie libre, un vaso abierto, un estanque, un lago, etc. la presión en el punto 2 es la presión atmosférica  $P_0$ .

$$P_0 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$$

Si hacemos que  $P_1 = P$ :

$$P = P_0 + \rho g(y_2 - y_1)$$

$(y_2 - y_1)$  es la profundidad  $h$ , por debajo de la superficie, entonces:

$$P = P_0 + \rho gh$$

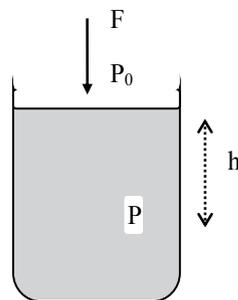
Lo que muestra que *la presión es la misma en todos los puntos situados a la misma profundidad*.

Obsérvese que la forma del recipiente no afecta a la presión.

En los gases,  $\rho$  es comparativamente pequeña y la diferencia de presión entre dos puntos generalmente es despreciable. Por lo tanto en un recipiente que contenga algún gas podemos considerar a la presión como si fuese la misma en todos sus puntos. Sin embargo, este no sería el caso si  $y_2 - y_1$  fuese muy grande. La presión de la atmósfera varía notablemente a medida que ascendemos a grandes alturas. En dichos casos, la densidad varía con la altura y antes de que podamos integrar la ecuación anterior debemos conocer  $\rho$  (y también  $g$ ) como una función de  $y$ .

## EL PRINCIPIO DE PASCAL Y EL PRINCIPIO DE ARQUIMIDES

Supongamos un cilindro que contenga un líquido, el cilindro está provisto de un pistón al cual podemos aplicar cualquier presión externa  $P_0$ .



La presión  $P$  en cualquier punto que esté a una distancia  $h$ , viene dada por:

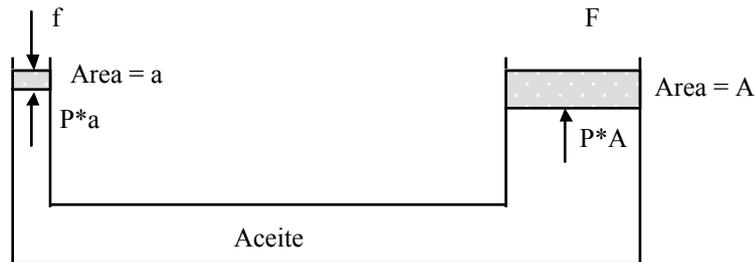
$$P = P_0 + \rho gh$$

Si la presión  $P_0$  es aumentada (ajustando el émbolo) la presión  $P$  aumenta exactamente en esa misma cantidad.

este resultado fue enunciado por Blaise Pascal y se llama *Principio de Pascal*, que generalmente se lo expresa de la siguiente manera:

*La presión aplicada a un fluido contenido en un recipiente se transmite íntegramente a toda porción de dicho fluido y a las paredes del recipiente que lo contiene..*

El funcionamiento de la prensa hidráulica se basa en el Principio de Pascal.



Un pistón de sección transversal pequeña  $a$ , se utiliza para ejercer una pequeña fuerza  $f$  sobre un líquido (por ejemplo aceite).

La presión  $P = f/a$  se transmite a lo largo de un tubo, a un cilindro más ancho provisto también de un pistón de área  $A$ . Como la presión es la misma en ambos cilindros:

$$P = \frac{f}{a} = \frac{F}{A}$$

$$F = \frac{A}{a} f$$

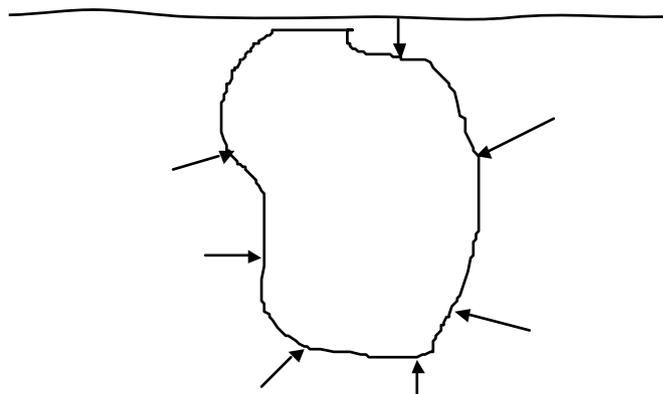
La prensa hidráulica es un dispositivo para multiplicar la fuerza con una ventaja mecánica ideal, igual a la razón de las áreas de los dos pistones.

Los sillones de los dentistas, los gatos hidráulicos, los frenos hidráulicos, están basados en este principio.

La experiencia común nos muestra que entre los cuerpos sumergidos en un fluido, algunos se hunden más y otros son empujados hacia la superficie y flotan.

El origen de este empuje hacia arriba es la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el fluido sobre el cuerpo.

Consideremos un cuerpo irregular sumergido en un fluido.



El fluido ejerce una presión sobre todas las partes de la superficie del cuerpo que están en contacto con el fluido. La presión es mayor sobre las partes sumergidas a mayor profundidad.

La resultante de todas las fuerzas es una fuerza dirigida hacia arriba y es denominado *empuje* sobre el cuerpo sumergido.

La presión sobre cualquier parte del cuerpo no depende del material de que está hecho el cuerpo.

Supongamos que el cuerpo, o la parte que está sumergida, se reemplaza por un fluido igual al que lo rodea. Este fluido experimentará la presión que actúa sobre el cuerpo sumergido y permanecerá en reposo.

Por lo tanto la *fuerza resultante* hacia arriba que actúa sobre él, será igual a su peso  $mg$  que actuará verticalmente hacia arriba a través de su centro de gravedad.

De aquí se deduce el Principio de Arquímedes:

Un *cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido es empujado hacia arriba con una fuerza que es igual al peso del fluido desplazado por dicho cuerpo.*

La fuerza que actúa verticalmente pasa a través de su centro de gravedad del fluido antes de ser desplazado.

## MEDIDA DE LA PRESIÓN

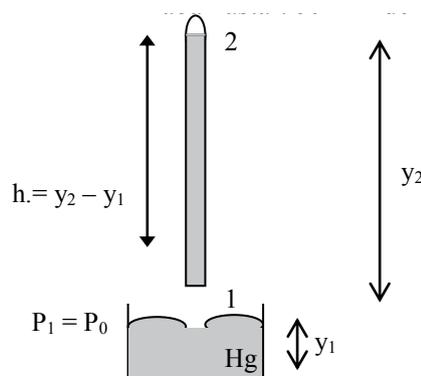
Las técnicas de medición de la presión, se basan en medir la diferencia entre la presión en objeto y la presión atmosférica.

Los aparatos utilizados para este fin se llaman *manómetros*.

Un ejemplo de manómetro es el que utilizan los médicos para medir la presión arterial de la sangre, aunque muchos de ellos no sepan lo que miden. No es raro escuchar que la presión es "13" ó "130", ó "1.3" y si uno pregunta ¿13 que? hasta le pueden contestar 13 atmósferas o 13 cmHg. Lo que se mide en realidad es la diferencia entre la presión arterial y la atmosférica que es en general entre 80 y 150 mmHg.

Esta unidad mmHg, viene del aparato que ideó Evangelista Torricelli para medir la presión atmosférica.

Torricelli llenó un tubo de vidrio con mercurio, después lo invirtió (sin dejar entrar aire) en un baño de mercurio y vio que la columna bajaba hasta 760 mm de altura (al nivel del mar)



El espacio que queda por encima de la columna de mercurio, contiene solamente vapor de mercurio, cuya presión, a la temperatura ambiente, es tan pequeña que puede despreciarse.

$$P_0 = \rho g(y_2 - y_1)$$

$$P_0 = \rho g h$$

La presión de una *atmósfera*, (1 atm), se define como la presión equivalente a la ejercida por 76 cm exactos de mercurio, a 0 °C cuando actúa la gravedad patrón  $g = 980.665 \text{ cm/sec}^2$ . La densidad del mercurio a esta temperatura es de  $13.595 \text{ gr/cm}^3$ .

Por tanto, 1 atm es igual a:

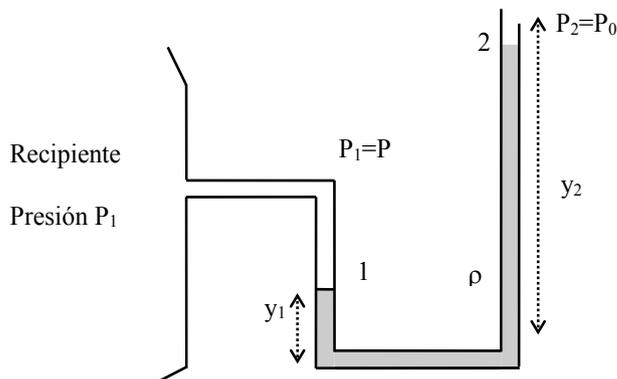
$$\begin{aligned} 1 \text{ atm} &= 13.595 \text{ gr/cm}^3 \times 980.665 \text{ cm/sec}^2 \times 76 \text{ cm} \\ &= 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2 (=1.013 \times 10^5 \text{ Pa}) \\ &= 14.7 \text{ lbf/plg}^2 \text{ (psi)} \end{aligned}$$

A menudo las presiones se especifican dando la altura de una columna de mercurio a 0 °C, dando origen a la expresión *cm de Hg* (o *plg de Hg*); sin embargo hay que tener en cuenta que la presión es la relación entre la fuerza y área, y no es una longitud.

$$\begin{aligned} 1 \text{ atm} &= 76 \text{ cmHg} = 29.92 \text{ plg Hg} \\ &= 10.33 \text{ m de agua.} \end{aligned}$$

Las fluctuaciones de la presión atmosférica son un indicador del estado del tiempo, si la presión sube, el tiempo mejora. De aquí el uso del barómetro como indicador del tiempo.

Un tipo de manómetro sencillo es el de tubo en "U", abierto en una rama y con el otro conectado al sistema a medirse.



La presión en el fondo de la columna de la izquierda es:  $P + \rho g y_1$ ,  
 En el fondo de la columna de la derecha es:  $P_0 + \rho g y_2$ ,

Como ambas presiones se refieren al mismo punto:

$$P + \rho g y_1 = P_0 + \rho g y_2$$

$$P - P_0 = \rho g(y_2 - y_1)$$

$$P - P_0 = \rho g h$$

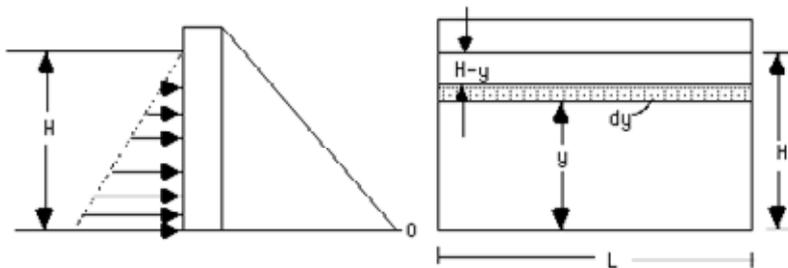
La presión  $P$  es la denominada *presión absoluta*, mientras que la diferencia  $(P - P_0)$  se denomina *presión manométrica*.

### FUERZAS CONTRA UN DIQUE

Consideremos un dique, en cual el nivel del agua alcanza una altura  $H$ . El agua ejerce una fuerza resultante que tiende a deslizar al dique a lo largo de su base y ejerce un cierto momento que tiende a volcar el dique alrededor del punto 0.

Se desea calcular la fuerza horizontal resultante y la altura a la que actúa esa fuerza, así como su momento.

Representemos la cara del dique que se encuentra frente a la masa de agua.



$$P = \rho g(H-y)$$

(No es necesario tomar en cuenta la presión atmosférica, porque también actúa sobre el otro lado del dique).

La fuerza contra el elemento  $dy$  es:

$$dF = PdA = \rho g(H-y)dA$$

$$dF = \rho g(H-y)Ldy$$

La fuerza total es:

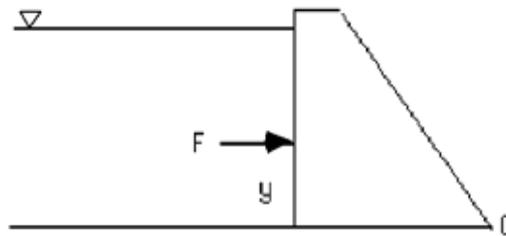
$$\int_0^F dF = \int_0^H \rho g (H - y) L dy$$

$$F = \rho g L \left[ \int_0^H H dy - \int_0^H y dy \right] = \rho g L \left[ Hy - \frac{y^2}{2} \right]_0^H$$

$$F = \rho g L \left( H^2 - \frac{H^2}{2} \right)$$

$$F = \frac{1}{2} \gamma L H^2$$

Para calcular la altura y por encima de 0, a la cual actúa la fuerza F, debemos calcular el MOMENTO DE LA FUERZA dF, respecto a un eje que pasa por el punto 0:



$$dM = y dF = \rho g (H - y) y L dy$$

$$\int_0^M dM = \int_0^H \rho g (H - y) y L dy$$

$$M = \rho g L \left( \int_0^H H y dy - \int_0^H y^2 dy \right)$$

$$M = \rho g L \left[ \frac{1}{2} H^3 - \frac{1}{3} H^3 \right]$$

$$M = \frac{1}{6} \gamma L H^3$$

Y, la altura y a la cual actúa la fuerza resultante F será:

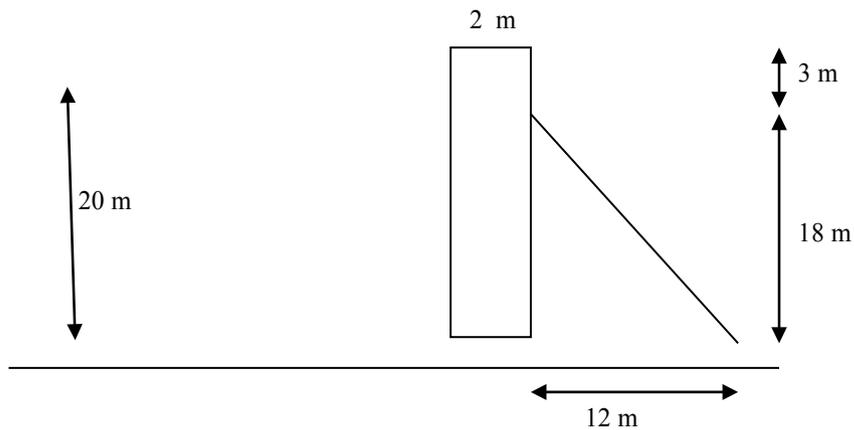
$$M = y F \quad ; \quad y = M/F$$

$$M = \frac{\frac{1}{6} \gamma L H^3}{\frac{1}{2} \gamma L H^2}$$

$$y = \frac{1}{3} H$$

Por lo tanto, la línea de acción de la resultante se encuentra a 1/3 de la altura por encima del punto 0; ó a 2/3 de la altura por encima del punto 0; ó a 2/3 de la superficie libre.

Ejemplo: Diseño de un dique tomando en cuenta el empuje ascensional hidrostático.  $L = 1$  m



El empuje ascensional hidrostático, puede suponerse que vale la mitad de la presión hidrostática en el borde aguas arriba decreciendo linealmente hasta valer cero en el borde aguas abajo de la presa.

$$\text{EMPUJE ASCENSIONAL HIDROSTATICO} = 1/2 * 20\gamma * (12+2) * 1/2 * 1$$

$$\text{EMPUJE ASCENSIONAL HIDROSTATICO} = 70 \gamma$$

$R_x =$  TENSION DE CORTADURA (realizando sumatorias en el eje x)

$$R_x = 200 \gamma$$

$R_y =$  fuerza hacia arriba

$R_y =$  peso de la presa - empuje ascensional hidrostático

$$R_y = W_1 + W_2 - 10 \gamma$$

$$\Sigma M_0 = 0$$

$$\Sigma M_0 = R_y X - 200 \gamma * 20/3 - W_1 * 1 - W_2 * 6 + 70 \gamma * 4.66$$

$$X = 8,95 \text{ m}$$

Cuando la resultante  $R_y$  cae en el tercio central de la presa, el esfuerzo es un esfuerzo de compresión. Debido a que el hormigón no debe trabajar a extensión, en un buen proyecto la resultante debe caer en el tercio central de la base.

## TENSIÓN SUPERFICIAL

Un líquido que fluye lentamente por el extremo de un cuentagotas no sale en forma de chorro continuo, sino como una sucesión de gotas.

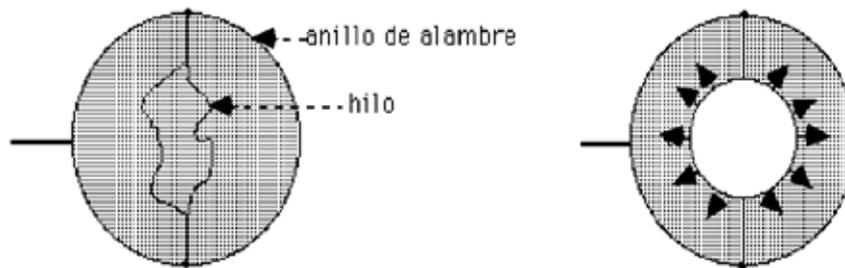
Es un experimento sencillo colocar una aguja pequeña en la superficie en reposo de un líquido y observar como es soportada en la superficie. Cuando un tubo de vidrio, limpio y de pequeño calibre, se sumerge dentro del agua, el agua se eleva en su interior; pero si se sumerge en mercurio, el mercurio desciende.

Estos fenómenos están relacionados con la existencia de una *superficie límite* entre un líquido y alguna otra sustancia.

En la superficie de contacto entre líquido y gas parece formarse en el líquido una película o capa especial, debida en apariencia a la atracción de las moléculas del líquido situadas por debajo de la superficie.

Esta propiedad de la película superficial de ejercer una tensión se llama *tensión superficial*. *Esta tensión superficial se define como la fuerza necesaria para mantener la unidad de longitud de la película en equilibrio.*

Por ejemplo, consideremos un anillo de alambre con un bucle de hilo flexible, si se introduce el conjunto en una disolución de jabón al sacarla se habrá formado una delgada película de líquido en la que el hilo flotará libremente.



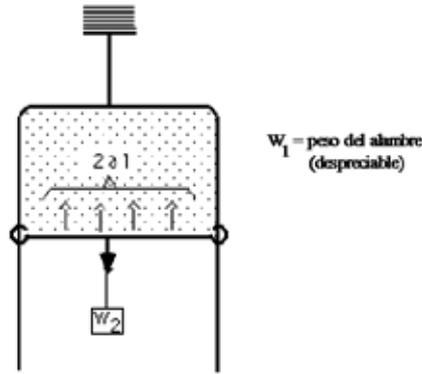
Si se pincha el interior del bucle de hilo, este adopta forma circular como si las superficies del líquido tirasen radialmente hacia afuera, en el sentido de las flechas. Antes de pinchar la lámina, actuaban las mismas fuerzas, pero como había lámina líquida a ambos lados del hilo, la fuerza neta ejercida por ella sobre cualquier porción del hilo era nula.

Un otro ejemplo es la de un alambre doblado en forma de U sobre el cuál se desliza un otro alambre de peso despreciable, digamos  $w_1$ .

El dispositivo se introduce en una disolución de jabón y, al sacarlo, el deslizador es rápidamente desplazado hacia la parte superior de la U.

Para mantenerlo en equilibrio es necesario añadir un segundo peso  $w_2$ . Aunque parezca extraño, la misma fuerza total  $F = w_1 + w_2$  mantendrá el alambre en reposo en cualquier posición independiente del área de la lámina líquida, siempre que esta permanezca a T constante. Esto es, la fuerza no aumentará cuando se estira más la superficie.

Aunque una película de jabón como la de la figura anterior es muy delgada, su espesor es enorme comparado con el tamaño de una molécula. Por consiguiente puede considerarse formada fundamentalmente por un volumen líquido limitado por dos capas superficiales cuyo espesor es de algunas moléculas.



Cuando se tira hacia abajo la varilla transversal, aumentamos el área de la lámina, ciertas moléculas, situadas inicialmente en el interior de la masa líquida, se desplazan hacia las capas superficiales. Es decir estas capas no están tensadas como una lámina de goma, sino *que su área aumenta por desplazamiento de moléculas procedentes de la masa líquida.*

Sea  $L$  la longitud del alambre deslizante. Como la película tiene dos superficies, la longitud total a lo largo de la cuál actúa la fuerza superficial es  $2L$ . La tensión superficial  $\sigma$ , en la película se define como antes, *la fuerza necesaria para mantener la unidad de longitud de la película en equilibrio.* En este caso:

$$\sigma = \frac{F}{2L}$$

La unidad mks de la tensión superficial es el newton por metro ( $\text{N m}^{-1}$ ).

Líquido en contacto con aire	T (°C)	$\sigma$ (dynas/cm)
Agua	0	75.6
Agua	100	58.9
Mercurio	20	465.0
Disolución de jabón	20	25.0

La tensión superficial disminuye al aumentar la temperatura.

Una burbuja de jabón está formada por dos láminas superficiales esféricas muy próximas con líquido entre ellas. La tensión superficial hace que las láminas tiendan a contraerse, pero cuando se contrae la burbuja comprime el aire interior, aumentando su presión hasta un valor que impide que siga contrayéndose.

Para obtener una relación entre la tensión superficial y este exceso de presión, hemos de aplicar los principios de la estática a una semi burbuja.

Consideremos una pequeña gota esférica de radio  $R$ . Tomemos un pequeño elemento de superficie  $dA$ .

Sea  $P$  la presión del aire a la izquierda del elemento y  $P_a$  a la derecha.

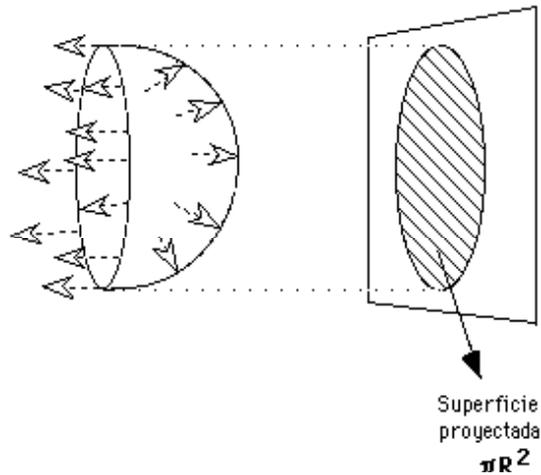
La fuerza *normal* al elemento será por tanto  $(P - P_a)dA$  y *la componente de ésta fuerza en la dirección x será:*

$$(P - P_a)dA \cos \theta.$$

Pero  $dA \cos \theta$  es la *proyección del área sobre un plano perpendicular al eje x.*

Por lo tanto, la fuerza en la dirección x es la diferencia de presiones multiplicada por la *proyección del área* en la dirección x.

Consideremos ahora una semi-burbuja:



Las fuerzas internas hacia la derecha son iguales a la diferencia de presión ( $P - P_a$ ), multiplicada por la proyección del área en el eje x, es decir:

$$F \text{ (hacia la derecha)} = (P - P_a) \pi R^2$$

La fuerza hacia la izquierda que mantiene unida a la burbuja, gracias a la *tensión superficial*  $\sigma$ , es igual a la tensión superficial  $\sigma$  multiplicada por el *perímetro*  $2\pi R$ , es decir:

$$F \text{ (hacia la izquierda)} = 2 \pi R \sigma$$

como la semi-burbuja está en equilibrio:

$$(P - P_a) \pi R^2 = 2 \pi R \sigma$$

$$(P - P_a) = \frac{2\sigma}{R}$$

para una *burbuja de jabón*, donde la tensión superficial es en realidad  $2\sigma$ :

$$(P - P_a) = \frac{4\sigma}{R}$$

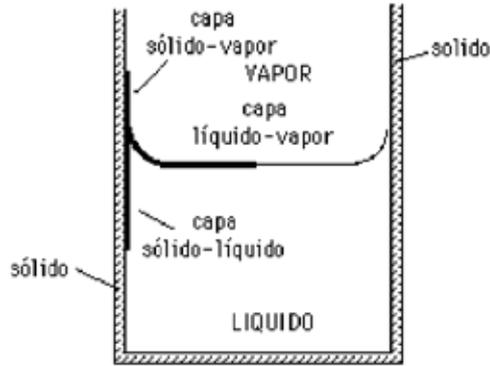
Estas ecuaciones prueban que *la presión es tanto mayor, cuanto menor es el radio de la gota.*

## CAPACIDAD

Hasta ahora hemos visto láminas superficiales situadas en el límite entre un líquido y un gas.

Existen también láminas superficiales entre una pared sólida y un líquido, y entre un sólido y un vapor.

Consideremos un líquido, contenido en un recipiente:



Existe un límite entre una pared *sólida* y un *líquido*, así como también entre un *líquido* y un *vapor* y entre un *sólido* y un *vapor*.

Asociado a cada lámina, existe una tensión superficial:

$\sigma_{sl}$  = Tensión superficial *sólido-líquido*

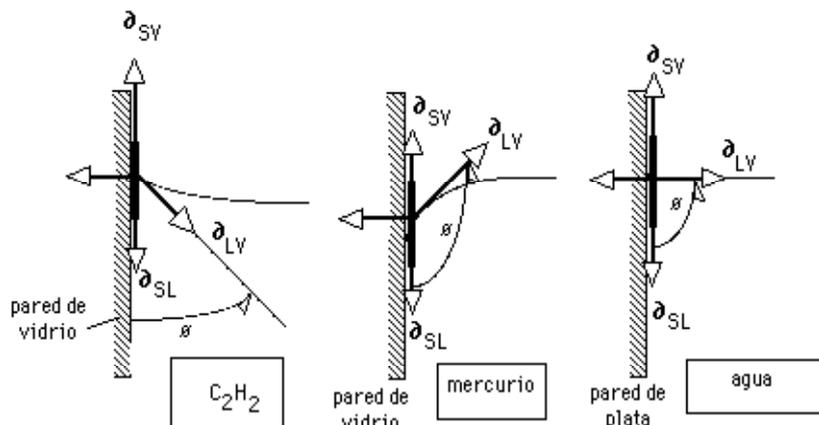
$\sigma_{sv}$  = Tensión superficial *sólido-vapor*

$\sigma_{lv}$  = Tensión superficial *líquido-vapor*

Recordemos que  $\partial = \partial_{LV}$ .

La curvatura de la *superficie líquida*, en la proximidad de la pared *sólida* depende de la diferencia entre ( $\sigma_{sv} - \sigma_{sl}$ ).

Consideremos una porción de pared de vidrio en contacto con yoduro de metileno ( $CH_2I_2$ ) con mercurio y agua en forma separada:



Tenemos tres fuerzas debidas a las tensiones superficiales y una cuarta **A** denominada *adhesión* o *fuerza adherente* entre el líquido y el sólido.

Para el yoduro de metileno, aplicando condiciones de equilibrio, tenemos:

$$\sum F_x = \sigma_{lv} \text{Sen } \theta - A = 0$$

$$\sum F_y = \sigma_{sv} - \sigma_{sl} - \sigma_{lv} \text{Cos } \theta = 0$$

De donde:

$$A = \sigma_{lv} \text{Sen } \theta$$

$$\sigma_{sv} - \sigma_{sl} = \sigma_{lv} \text{Cos } \theta$$

La ecuación  $A = \sigma_{lv} \text{Sen } \theta$ , permite calcular la fuerza adherente o adhesión a partir de las medidas de  $\sigma_{lv}$  y del ángulo  $\theta$  denominado ángulo de contacto.

La ecuación  $\sigma_{sv} - \sigma_{sl} = \sigma_{lv} \text{Cos } \theta$  demuestra que el ángulo de contacto, que es una medida de la curvatura de la superficie líquido-vapor adyacente a la pared depende de la diferencia entre  $\sigma_{sv}$  y  $\sigma_{sl}$ .

Así en el caso de yoduro de metileno,  $\sigma_{sv} > \sigma_{sl}$  lo que implica que  $\text{Cos } \theta$  sea positivo ( $0 < \theta < 90^\circ$ ); en éste caso se dice que el *líquido moja al sólido*.

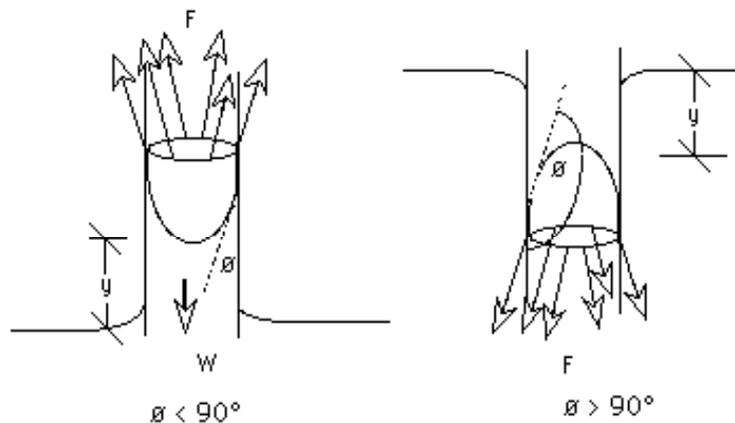
En el caso del mercurio,  $\theta \approx 140^\circ$ ,  $\Rightarrow \text{Cos } \theta$  es negativo, por tanto  $\sigma_{sv} < \sigma_{sl}$ . Si el ángulo de contacto está entre  $90$  y  $180^\circ$  se dice que el *líquido no moja al sólido*.

En el caso de agua destilada,  $\theta \approx 90^\circ \Rightarrow \text{Cos } 90 = 0$  y  $\sigma_{sv} = \sigma_{sl}$ .

Las impurezas presentes o añadidas a un líquido pueden alterar considerablemente el ángulo de contacto. (humectantes y detergentes).

Un fenómeno importante que resulta de la tensión superficial es la elevación de un líquido en un tubo abierto de pequeña sección.

El término *CAPILARIDAD*, utilizado para describir fenómenos de éste tipo, procede de que estos tubos se denominan "capilares", o sea, "análogos a cabellos". En el caso de un líquido que moja el tubo, el ángulo de contacto es menor de  $90^\circ$  y el líquido se eleva hasta alcanzar una altura de equilibrio  $y$ ; la superficie líquida curva dentro del tubo se denomina *menisco*.



Si el tubo es un cilindro de radio  $r$ , el líquido está en contacto con el tubo a lo largo de una línea de longitud  $2\pi r$ . Considerando aislado el cilindro líquido, de altura  $y$ , radio  $r$ , junto con su capa líquido vapor, la fuerza total hacia arriba es:

$$F = 2\pi r \sigma_{lv} \cos \theta$$

La fuerza hacia abajo es el peso  $w$  del cilindro, que es igual al peso específico  $\rho g$  multiplicado por el volumen, que es aproximadamente  $\pi r^2 y$ , despreciando el pequeño volumen del menisco, o sea:

$$w = \rho g \pi r^2 y$$

Como el cilindro está en equilibrio:

$$\rho g \pi r^2 y = 2\pi r \sigma_{lv} \cos \theta$$

Es decir:

$$y = \frac{2 \sigma_{lv} \cos \theta}{\rho g r}$$

CAPITULO IV  
HIDRODINAMICA

INTRODUCCIÓN

La hidrodinámica trata del estudio de los fluidos en movimiento.

La hidrodinámica constituye una de las ramas más complejas de la mecánica, como podemos ver en los ejemplos del desbordamiento de un río o los remolinos del humo de un cigarrillo.

Las leyes que norman el movimiento de un fluido son las mismas que norman el movimiento de un cuerpo rígido: las Leyes de Newton.

Sin embargo el aplicar las Leyes de Newton a un fluido es complejo, y es preferible utilizar otras relaciones que tengan aplicaciones para el movimiento de los fluidos.

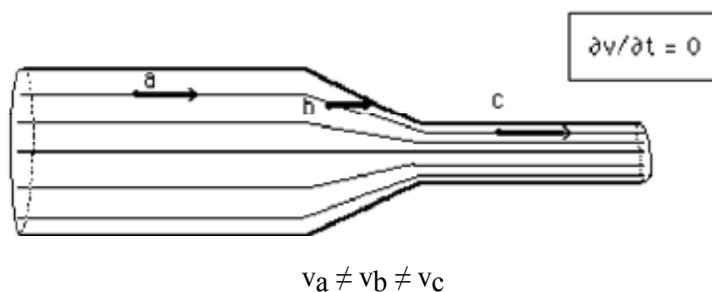
Al movimiento de un fluido se le denomina *flujo*. El flujo de un fluido puede clasificarse de muchas maneras.

El flujo de los fluidos puede ser *turbulento o laminar; estacionario o no estacionario; compresible o incompresible; rotacional o irrotacional, viscoso o no viscoso, uniforme o no uniforme, etc.*

En el *flujo turbulento*, el más frecuente en las aplicaciones de ingeniería, las *partículas* del fluido (pequeñas masas moleculares) se mueven siguiendo trayectorias muy irregulares.

En el *flujo laminar* las partículas del fluido se mueven a lo largo de trayectorias lisas en capas ó láminas, deslizándose una capa sobre la adyacente.

Se dice que el *flujo es estacionario*, cuando la velocidad de cada partícula en cualquier punto dado del fluido que pasa es siempre la misma, es decir *la velocidad del fluido en cualquier punto no varía con el tiempo*.



En general:  $\partial v/\partial t=0$ ,  $\partial r/\partial t=0$ ,  $\partial P/\partial t=0$ ,  $\partial Q/\partial t=0$ ,  $\partial T/\partial t=0$ .

En cualquier otro punto, una partícula puede viajar con una velocidad diferente, pero cualquier otra partícula que pase por éste segundo punto tendrá la misma velocidad que la primera partícula cuando pasó por éste punto.

El *flujo es no estacionario*, cuando la velocidad de las partículas, en cualquier punto cambia con el tiempo,  $\partial v/\partial t \neq 0$ , en el caso de flujo turbulento, como en los rápidos de un río o en una catarata, *las velocidades varían de un instante a otro en el mismo punto*.

*Flujo uniforme*, es cuando la velocidad no varía con la posición, es decir:  $\partial v/\partial s=0$ ;  $\partial r/\partial s=0$ ;  $\partial T/\partial s=0$ , etc.

Ejemplos de flujo permanente (estado estacionario) y uniforme pueden ser:

Un líquido que fluye a través de una larga tubería recta de sección constante y a caudal constante, es un flujo *permanente y uniforme*.

Un líquido que fluye por una larga tubería recta de sección constante y a caudal creciente es un *flujo no permanente y uniforme*.

El flujo por un tubo de sección creciente a caudal constante es *permanente y no uniforme*.

El flujo por un tubo de sección creciente a caudal creciente es *no permanente y no uniforme*.

Si el flujo del fluido, *no tiene una velocidad angular neta* alrededor de un punto dado, se dice que el flujo del fluido es *irrotacional*.

Por lo general puede considerarse que los líquidos fluyen *incompresiblemente*. Pero un gas muy compresible puede, en ocasiones, sufrir cambios tan poco importantes en su densidad y entonces su flujo puede considerarse como incompresible. En los vuelos a velocidad mucho menores que la del sonido en el aire (aerodinámica subsónica), el movimiento del aire respecto a las alas del aparato constituye un ejemplo de flujo casi incompresible; densidad independiente de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ .

Por último el flujo de los fluidos puede ser *viscoso o no viscoso*. La viscosidad en el movimiento de los fluidos es el análogo de la fricción en el movimiento de los sólidos.

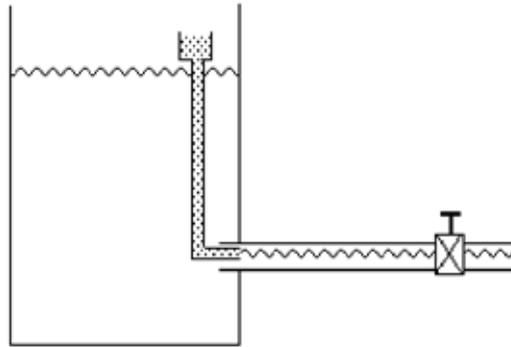
En los problemas de lubricación la viscosidad es sumamente importante. A causa de la viscosidad, los fluidos tendrán una velocidad mayor en el centro del tubo que en las partes más alejadas de él.

El estudio que hagamos en la dinámica de los fluidos quedará restringido, en su mayor parte, al *flujo estacionario, irrotacional, incompresible y no viscoso*.

## LAS LINEAS DE CORRIENTE

Supongamos un fluido que escurre por una tubería insertada en la base de un recipiente:

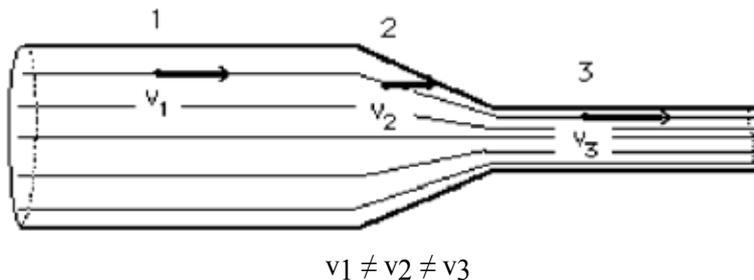
Si inyectamos al fluido un otro *fluido coloreado* es posible poner de manifiesto unas líneas que indican el recorrido de las partículas coloreadas.



Estas líneas son la visualización de un concepto fundamental en hidrodinámica: *la línea de corriente*.

Definimos una *línea de corriente*, como una línea continua trazada en el fluido que es en cada punto paralela al vector velocidad. A través de una línea de corriente no puede cruzar un fluido.

Suponiendo *flujo estacionario*, una partícula que pasa por los puntos 1, 2 y 3 marca una línea de corriente o una línea de flujo.



Toda partícula que llegue al punto 1, pasará con la misma rapidez y en la misma dirección, es decir seguirá o deberá seguir su camino *por la misma línea de corriente* que la anterior. En flujo estacionario, dos líneas de corriente no pueden cruzarse.

Si escogemos un número finito de líneas de corriente para formar un haz, la región tubular formada se denomina *tubo de flujo*.



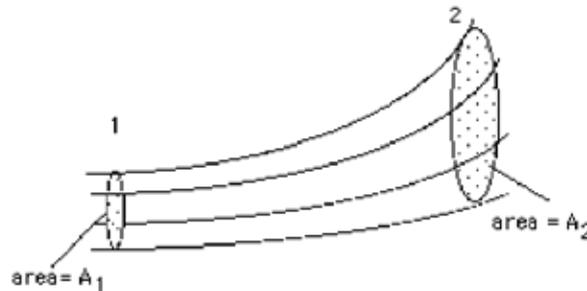
Un *tubo de flujo* es una superficie ideal que tiene la propiedad de que las partículas de fluido no pueden cruzar sus paredes.

Es decir el fluido no puede cruzar el borde de un tubo de flujo y el tubo se comporta, como una tubería que tuviese la misma forma. *El fluido que entra por un extremo debe salir por el otro.*

## LA ECUACIÓN DE LA CONTINUIDAD

La ecuación de la continuidad, es una expresión analítica del principio general de conservación de la masa

Consideremos un tubo de flujo angosto:



La velocidad del flujo en su interior, aunque es paralela al tubo en cualquier punto, *puede tener diferentes magnitudes en puntos distintos.*

Sea  $v_1$  la velocidad del fluido en el punto 1 y  $v_2$  la velocidad en el punto 2. Sean  $A_1$  y  $A_2$  las áreas transversales de los tubos perpendiculares a las líneas de corriente en los puntos 1 y 2 respectivamente.

En el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , un elemento de fluido recorre aproximadamente la distancia  $v \cdot \Delta t$ . Por lo tanto, la masa del fluido  $\Delta m_1$  que cruza  $A_1$  en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es aproximadamente:

$$\Delta m_1 = \rho_1 V_1; \quad V_1 = \text{volumen} = v_1 \cdot \Delta t \cdot A_1$$

De donde:

$$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$$

o el *flujo de masa*  $\Delta m_1 / \Delta t$  es aproximadamente  $\rho_1 A_1 v_1$ .

Podemos hacer que  $\Delta t$  sea tan pequeña que en éste intervalo de tiempo ni  $v$  ni  $A$  varíen apreciablemente en la distancia que recorre el fluido.

En el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtenemos:

$$\text{FLUJO DE MASA EN 1} = \rho_1 A_1 v_1$$

$$\text{FLUJO DE MASA EN 2} = \rho_2 A_2 v_2$$

Donde  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son las densidades del fluido en 1 y 2 respectivamente.

Como el fluido no puede cruzar las paredes del tubo, y como no existen *ni fuentes ni sumideros* donde el flujo pueda crearse o destruirse en el interior del tubo, *la masa que cruza cada sección del tubo por unidad de tiempo debe ser siempre la misma.*

Es decir el flujo de masa en 1, debe ser igual al flujo de masa en 2.

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

$$\rho A v = \text{constante}$$

Esta expresión manifiesta la conservación de la masa en la dinámica de los fluidos, y se denomina *Ecuación de la Continuidad* para el *flujo estacionario* de un fluido.

Si el fluido es incompresible, como supondremos en éste curso,  $\rho_1 = \rho_2$  y la ecuación  $\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$  toma una forma más sencilla:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$A v = \text{constante}$$

Recordemos, para flujo incompresible.

El producto  $A \cdot v$  es el *flujo de volumen*, o *flujo volumétrico*, denominado *caudal volumétrico*:

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad [=] \text{ m}^3/\text{sec} \quad \text{SI}$$

Nótese que predice que en un flujo estacionario incompresible, la rapidez del flujo varía inversamente con el área de la sección recta, *siendo mayor en la parte más angosta del tubo*.

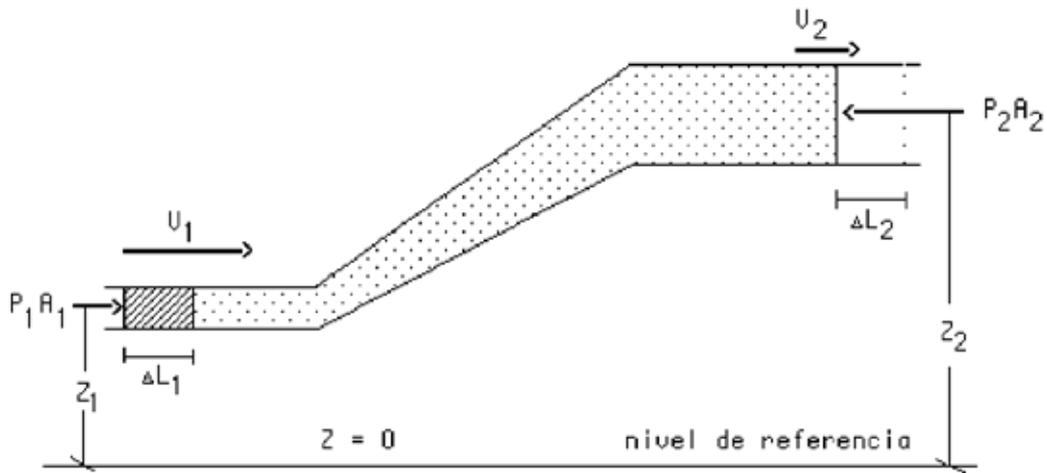
El producto  $\rho A v$  es el *flujo de masa*, o flujo masico:

$$W = \rho Q = \rho A v \dots [=] \text{ kgm/sec} \dots \text{SI}$$

## LA ECUACIÓN DE BERNOULLI

La ecuación de Bernoulli es una relación fundamental de la mecánica de los fluidos, que relaciona *la presión, la velocidad y la altura* en los puntos situados a lo largo de una línea de corriente.

Consideremos el flujo *no viscoso, estacionario e incompresible*, de un fluido a lo largo de un conducto o de una *línea de flujo*.



La parte de la tubería de la izquierda tiene una sección transversal  $A_1$ , y está a una altura  $Z_1$  sobre algún nivel de referencia. La tubería gradualmente se ensancha y sube hasta que la parte derecha tiene una sección transversal  $A_2$  y está a una altura  $Z_2$ .

Concentremos nuestra atención en la porción de fluido entre  $\Delta L_1$  y  $\Delta L_2$  (parte sombreada) y llamaremos a éste fluido “*el sistema*”.

Consideremos entonces el movimiento del sistema, desde la posición 1 hasta la posición 2.

En todos los puntos de la parte angosta de la tubería la presión es  $P_1$  y la velocidad  $v_1$  y en la parte ancha la presión es  $P_2$  y la velocidad  $v_2$ .

Cuando la parte izquierda del sistema avanza una distancia  $\Delta L_1$ , paralela a la fuerza exterior  $P_1 A_1$  *el trabajo efectuado sobre el sistema* por esta fuerza es:

$$W_1 = P_1 A_1 \Delta L_1$$

Mientras que la parte derecha, ha avanzado una distancia  $\Delta L_2$ , sobre la que actúa una fuerza exterior  $P_2 A_2$  en sentido opuesto. Por consiguiente *el trabajo efectuado por el sistema*, es:

$$W_2 = P_2 A_2 \Delta L_2$$

Para mover el sistema de la posición 1 a la posición 2, ha de realizarse un trabajo por un agente exterior (en éste caso una bomba); éste *trabajo neto*, viene dado por:

$$W_{\text{neto}} = W_1 - W_2 = P_1 A_1 \Delta L_1 - P_2 A_2 \Delta L_2$$

pero  $A_1 \Delta L_1$  (y  $A_2 \Delta L_2$ ) es el volumen del elemento sombreado el cual puede representarse como  $V = A_1 \Delta L_1 = m/\rho$ .

Como la densidad del fluido es constante (flujo incompresible):

$$A_1 \Delta L_1 = A_2 \Delta L_2 = m/\rho$$

y el *trabajo neto* será:

$$W_{\text{neto}} = (P_1 - P_2)m/\rho$$

El *cambio de la energía cinética* del elemento de fluido es:

$$\Delta v = 1/2 m v_2^2 - 1/2 m v_1^2$$

El cambio de la energía potencial gravitatoria del elemento de fluido es:

$$\Delta Z = m g Z_2 - m g Z_1$$

El teorema de la variación de la energía establece que: *el trabajo efectuado por la fuerza resultante que actúa sobre el sistema es igual al cambio de la energía cinética y potencial del sistema.*

Igualando el trabajo neto a la suma de los incrementos de sus energías cinética y potencial:

$$(P_1 - P_2)m/\rho = 1/2 m (v_2^2 - v_1^2) + m g (Z_2 - Z_1)$$

Que puede ordenarse de la forma:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + Z_2$$

Ecuación conocida como la *Ecuación de Bernoulli*, para *flujo en estado estacionario, no viscoso e incompresible*.

Como los subíndices 1 y 2 se refieren a dos lugares cualesquiera de la tubería, podemos escribir:

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + Z = \text{constante}$$

En la ecuación de Bernoulli, P es la *presión absoluta*.

Todos los términos de ésta ecuación tienen la dimensión de una longitud denominada  $p/\gamma$ , altura piezométrica,  $v^2/2g$ , altura cinética y Z altura geométrica.

Debido a las pérdidas ocasionadas por la fricción del fluido y por los accesorios instalados en una línea, la ecuación de Bernoulli queda modificada de la siguiente manera:

Energía en la sección 1 + Energía añadida - Energía extraída = Energía en la sección 2 + Energía perdida

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 + H_B - H_T = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + Z_2 + h_{f\ 1-2}$$

Donde  $H_B$  es la energía añadida (por ejemplo por una bomba),  $H_T$  es la energía extraída (por ejemplo por una turbina) y  $h_{f\ 1-2}$  las pérdidas originadas por la fricción del fluido y los accesorios existentes entre el punto 1 y 2.

La *potencia de una bomba*, puede estimarse mediante la ecuación:

$$Pot = \frac{\gamma Q H_B}{75} [=] CV$$

Donde  $\gamma$  es el peso específico del fluido en  $\text{kgf/m}^3$ ,  $Q$  el caudal en  $\text{m}^3/\text{sec}$  y  $H_B$  la *altura* de la bomba en m.

Las pérdidas por fricción, se pueden estimar por la ecuación:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

Donde  $f$  se denomina coeficiente de fricción,  $L$  es la longitud total de la tubería,  $D$  es el diámetro de la tubería y  $v$  la velocidad del fluido.

Las pérdidas de carga debida a accesorios, se pueden estimar mediante:

$$h_f = K \frac{v^2}{2g}$$

Donde  $K$  es una constante que se encuentra tabulada y es función del tipo de accesorio (llave de paso, codo, entrada o salida a depósito, etc.). Para calcular el coeficiente de fricción  $f$  y la constante  $K$  remitirse a las tablas en anexo.

La ecuación de Bernouilli:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 + H_B - H_T = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + Z_2 + h_{f\ 1-2}$$

Para fluidos compresibles, puede escribirse como:

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\gamma} + \int_{v_1}^{v_2} \frac{v dv}{g} + \int_{z_1}^{z_2} dz + \int_1^2 h_f = 0$$

Donde es necesario conocer, principalmente, la variación de la presión en función del peso específico o de la densidad.

## APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI Y DE LA ECUACIÓN DE LA CONTINUIDAD

La ecuación de la hidrostática, es un caso especial del teorema de Bernouilli.

Podemos decir que la estática de los fluidos es un caso especial de la dinámica de los fluidos. En la estática de los fluidos  $v_1 = v_2 = 0$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 + H_B - H_T = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + Z_2 + h_{f\ 1-2}$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = Z_2 - Z_1$$

$$\gamma = \rho g$$

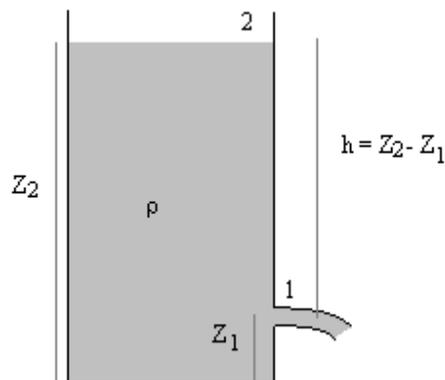
$$P_1 - P_2 = \rho g (Z_2 - Z_1)$$

$$P_2 = P_0 \quad \text{y} \quad P_1 = P$$

$$P = P_0 + \rho g h$$

Ecuación que habíamos obtenido en el capítulo anterior.

Consideremos un depósito de grandes dimensiones que contiene un líquido.



Este líquido sale por un orificio practicado a una profundidad  $h$  por debajo de la superficie. Sea el punto 1 en el orificio y el punto 2 en la superficie libre.

La presión en ambos puntos es la atmosférica ya que los dos se encuentran en comunicación con la atmósfera  $P_1 = P_2 = P_0$ .

Tomemos como nivel de referencia, el fondo del depósito. Si el orificio es pequeño, respecto al recipiente, el nivel del líquido en el depósito descenderá lentamente; puesto que:

$$Area_{(depósito)} \gg Area_{(orificio)}$$

Por consiguiente podemos suponer que  $v_2 \approx 0$ ; la ecuación de Bernoulli queda entonces:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 + H_B - H_T = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + Z_2 + h_{f\ 1-2}$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2$$

$$P_1 = P_2 = P_0 ; \quad v_2 = 0$$

$$\frac{v_1^2}{2g} = Z_2 - Z_1$$

$$Z_2 - Z_1 = h$$

$$v_1^2 = 2 g h$$

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de *Teorema de Torricelli*. Si A es el área de la abertura, el caudal del fluido que sale es:

$$Q = v A = A \sqrt{2gh}$$

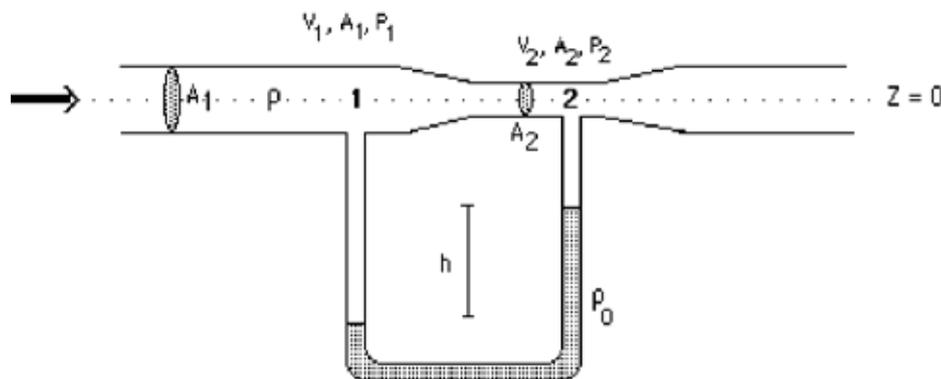
Experimentalmente se observa que la magnitud de la contracción depende de muchos factores como la forma de las paredes, y el espesor de la pared del orificio.

Debido a esto el área de la ecuación anterior debe ser en realidad el *área mínima*, llamada sección contraída, *vena contracta*, que para una abertura circular de bordes finos, el área de la sección contraída es aproximadamente el 65 % del área del orificio. En realidad la aparición de la *vena contracta*, suele ser función del tipo de descarga de tubería a depósito (conexión a ras de la pared, abocinada, entrante, etc.)

En realidad se realiza una corrección a la ecuación de Torricelli, tomando en cuenta la relación de velocidades (real/teórica) y los áreas de la vena/tubo ( $C_d = C_v C_a$ )

## MEDIDORES DE FLUJO

Un dispositivo denominado *Medidor de Venturi*, consiste en un estrechamiento producido en un ducto y proyectado de forma que mediante una disminución gradual de la sección en la entrada, y un aumento también gradual en la salida, que evite la formación de remolinos y quede asegurado un régimen estacionario.



El fluido de densidad  $\rho$ , tiene una velocidad  $v_1$  en el punto 1 y una presión  $P_1$ . En el punto 2, una velocidad  $v_2$  y una presión  $P_2$ . Las áreas de sección transversal son  $A_1$  y  $A_2$  respectivamente. Como el tubo es horizontal  $Z_1 = Z_2$ . Podemos aplicar la ecuación de Bernouilli entre los puntos 1 y 2:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 + H_B - H_T = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + Z_2 + h_{f_{1-2}}$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

Multiplicando toda la ecuación por  $\rho g$ :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + Z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + Z_2$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Como  $v_2 > v_1$ , se deduce que  $P_1 > P_2$ , es decir que la presión en el estrechamiento es menor que en el resto del tubo.

Si  $h$  es la diferencia de altura, en el fluido manométrico, de densidad  $\rho_0$ , la diferencia de presiones entre los puntos 1 y 2 es:

$$P_1 + \rho gh - \rho_0 gh - P_2 = 0$$

$$P_1 - P_2 = gh(\rho_0 - \rho)$$

Podemos remplazar en la ecuación de Bernoulli:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2)$$

$$gh(\rho_0 - \rho) = \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2)$$

La ecuación de continuidad nos relaciona las dos velocidades en función de las áreas transversales:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

$$2gh \frac{(\rho_0 - \rho)}{\rho} = v_2^2 - v_1^2$$

$$2gh \frac{(\rho_0 - \rho)}{\rho} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 v_1^2 - v_1^2$$

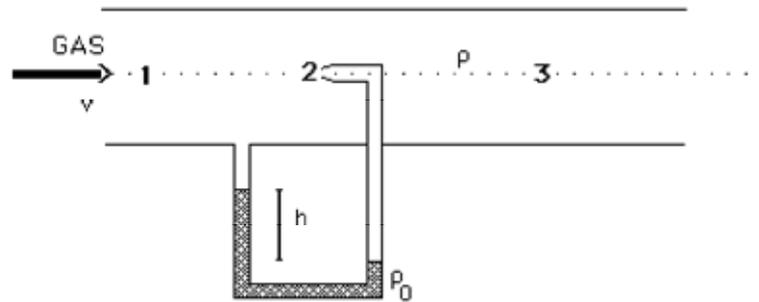
$$2gh \frac{(\rho_0 - \rho)}{\rho} = v_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]$$

$$v_1^2 = 2gh A_2^2 \frac{(\rho_0 - \rho)}{\rho (A_1^2 - A_2^2)}$$

$$v_1 = A_2 \sqrt{\frac{2gh(\rho_0 - \rho)}{\rho (A_1^2 - A_2^2)}}$$

Ecuación que nos permite calcular la velocidad del fluido, con lo que podremos calcular el caudal volumétrico,  $Q = v_1 A_1$ .

Un aparato para medir la *velocidad de un gas*, es el **Tubo de Pitot**. Un tubo manométrico abierto se conecta (como indica la figura) al centro del tubo dentro del cual circula el gas.



La presión en la rama izquierda del manómetro, cuya abertura es paralela a la dirección del movimiento del gas, es igual a la presión de la corriente gaseosa.

Sea  $v$  la velocidad de la corriente,  $P_1$  la presión en 1 y  $P_2$  en 2; la densidad del gas es  $\rho$  y la del líquido manométrico  $\rho_0$ .

La velocidad se reduce a cero en el punto 2 y el gas se estanca en ese sitio, esa velocidad en 2, se denomina *velocidad de estancamiento*.

Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 + H_B - H_T = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + Z_2 + h_{f_{1-2}}$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma}$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \rho v^2$$

Es decir,  $P_2 > P_1$ . Si  $h$  es la diferencia de altura en el manómetro, tenemos:

$$P_1 + \rho_0 g h = P_2$$

$$P_2 = P_1 + \rho_0 g h$$

Combinando con la ecuación anterior:

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v^2 = P_1 + \rho_0 g h$$

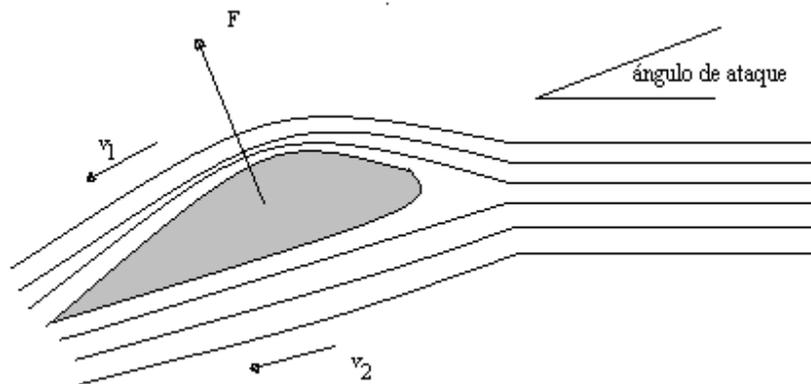
$$v = \sqrt{\frac{2\rho_0 g h}{\rho}}$$

Que determina la rapidez de flujo del gas.

## FUERZA ASCENSIONAL DINÁMICA

La fuerza ascensional dinámica es la fuerza que actúa sobre un cuerpo, tal como una ala de avión, un deslizador acuático o un rotor de helicóptero, *a causa de su movimiento a través de un fluido*.

Desde luego que debemos distinguirla de la *fuerza ascensional estática* que es la fuerza del empuje que actúa sobre un objeto, tal como un témpano de hielo, de acuerdo con el principio de Arquímedes.



En la figura mostramos las líneas de corriente en torno al perfil de una ala (o sección transversal del ala) unida a un aeroplano.

Escojamos como referencia al aeroplano mismo y supongamos que el aire se mueve, respecto del ala, de derecha a izquierda.

El *ángulo de ataque* del ala produce una desviación del aire hacia abajo. De la tercera ley de Newton, la reacción a esta fuerza descendente del ala sobre el aire es una fuerza ascendente  $F$ , o empuje, ejercida por el aire sobre el ala.

Si suponemos que el patrón de las líneas de flujo es consistente, por encima del ala (en el punto 1) las líneas de flujo están más concentradas que lo que lo están por debajo del ala (en el punto 2), por lo tanto  $v_1 > v_2$  y, del principio de Bernouilli,  $P_1 < P_2$  lo cual debe ocurrir si ha de haber empuje ascendente.

## VISCOSIDAD

Ya indicamos que la viscosidad es la propiedad de los fluidos que hace arrastrar las distintas capas en movimiento tangencial, impidiendo que estas fluyan unas sobre las otras.

De todas las propiedades del fluido es ésta la que requiere una especial atención en el estudio del movimiento de un fluido.

*La viscosidad es la propiedad de un fluido que ofrece resistencia al flujo.*

La viscosidad de un líquido disminuye con un aumento de la temperatura; la de una gas varía relativamente poco con variaciones de la presión y la temperatura.

La viscosidad  $\mu$ , denominada *viscosidad dinámica o absoluta* en el sistema cgs tiene como unidad el *poise* que es  $1 \text{ dina} \cdot \text{cm}/\text{sec}^2$  o  $1 \text{ gr}/(\text{cm sec})$ . 1 centipoise es la centésima parte de un poise,  $1 \text{ cP} = 10^{-2} \text{ P}$ .

$$\mu [=] \frac{\text{kg}}{\text{m hr}} \text{ o } \frac{\text{lb}}{\text{ft hr}}$$

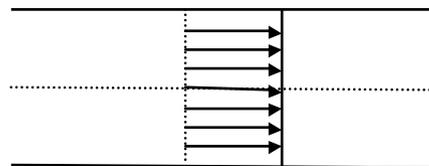
El cociente de la viscosidad por la densidad se denomina *viscosidad cinemática*  $\nu$ :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad \text{Ley de Stoke}$$

La unidad cgs es el *stoke* igual a  $1 \text{ cm}^2/\text{sec}$ .

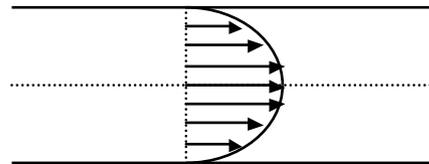
$$\nu [=] \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \text{ o } \frac{\text{ft}^2}{\text{s}}$$

En la deducción del teorema de la ecuación de Bernouilli y de la ecuación de la continuidad, *se han despreciado los efectos de la viscosidad*, en consecuencia, las velocidad de todas las partículas de fluido en una sección de un tubo eran iguales, es decir el perfil de velocidades era plano:



Perfil de velocidades plano

Cuando el fluido es viscoso y la velocidad no demasiado grande, el movimiento será *laminar*; en este caso la velocidad es máxima en el centro del tubo y disminuye hasta anularse en la pared del tubo.



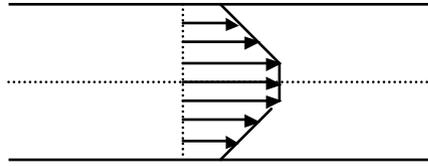
Perfil de velocidades en régimen laminar

Cuando la velocidad excede de un cierto valor crítico, la naturaleza del movimiento se hace mucho más complicada.

Se producen al azar corrientes locales e irregulares en el fluido, *denominados torbellinos*, que originan un gran aumento de la resistencia al movimiento.

Es imposible conocer la trayectoria de una partícula individualmente. Sin embargo en cada punto tendrá una componente de velocidad hacia adelante.

Un régimen de éste tipo, se denomina *flujo turbulento*.



Perfil de velocidades en régimen turbulento

## NÚMERO DE REYNOLDS

La experiencia indica que hay una combinación de cuatro factores que determina cuando el régimen de un *fluido viscoso* a través de un tubo es *laminar o turbulento*.

Esta combinación se denomina *Número de Reynolds* y se define mediante la expresión:

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$$

$$Re = \frac{v d}{\nu}$$

Donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $v$  su velocidad media,  $D$  el diámetro del tubo,  $\mu$  la viscosidad dinámica y  $\nu$  la viscosidad cinemática. El Número de Reynolds es un número adimensional.

Todos los experimentos demuestran que cuando el número de Reynolds se encuentra entre:

$$Re < 2100$$

El régimen de un fluido viscoso es *laminar*; mientras que si:

$$Re > 4000$$

El régimen es *turbulento*.

Entre  $2100 < Re < 4000$  hay una zona de transición en la cual el régimen es inestable y puede pasar de un tipo a otro. En resumen:

$Re < 2100$	Flujo laminar
$2100 < Re < 4000$	Flujo de transición
$Re > 4000$	Flujo turbulento.

## LEY DE POISEUILLE

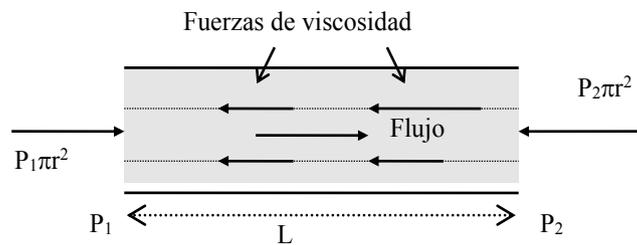
Sabemos que la velocidad de un *fluido viscoso* que circula por un tubo no es la misma en todos los puntos de una sección transversal.

La capa más externa se adhiere a las paredes del tubo, y su velocidad es nula. Las paredes ejercen sobre esta capa un arrastre hacia atrás que, a su vez, tira hacia atrás de la capa que sigue y así sucesivamente.

Siempre que el movimiento no sea demasiado rápido, el flujo es laminar, con una velocidad que es máxima en el centro del tubo y disminuye hasta anularse en las paredes.

Estudiamos la variación de velocidad con el radio para un tubo cilíndrico de radio interior  $R$ .

Consideremos el flujo de un elemento cilíndrico de fluido coaxial con el tubo de radio  $r$  y longitud  $L$ :



La fuerza sobre el extremo izquierdo del cilindro es  $P_1\pi r^2$ , y sobre el derecho,  $P_2\pi r^2$ . La fuerza será:

$$F = (P_1 - P_2)\pi r^2$$

Esta fuerza debe equilibrar exactamente la fuerza retardadora de viscosidad que actúa en la superficie de este elemento:

$$F = \mu A \frac{dv}{dr}$$

La fuerza de viscosidad actúa sobre el área  $A = 2\pi rL$ , de modo que:

$$F = \mu 2\pi rL \frac{dv}{dr}$$

Igualando esta expresión con la fuerza neta debida a la presión en los extremos, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mu 2\pi rL \frac{dv}{dr} &= (P_1 - P_2)\pi r^2 \\ -\frac{dv}{dr} &= \frac{P_1 - P_2}{2\mu L} r \end{aligned}$$

Esto demuestra que la velocidad cambia cada vez más rápidamente a medida que vamos desde el centro ( $r = 0$ ) a la pared del tubo ( $r = R$ ). Es preciso introducir el signo negativo debido a que  $v$  disminuye cuando  $r$  aumenta.

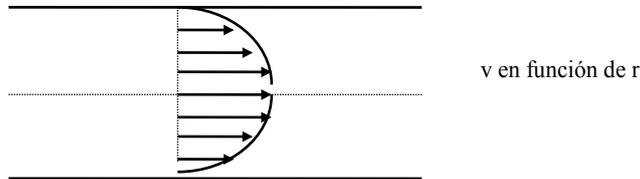
Integrando resulta:

$$\int_v^0 dv = \frac{P_1 - P_2}{2\mu L} \int_r^R r dr$$

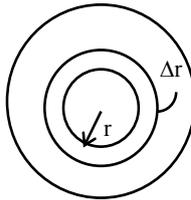
$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\mu L} (R^2 - r^2)$$

Vemos que la velocidad disminuye desde un valor máximo  $\frac{P_1 - P_2}{4\mu L} R^2$  en el centro hasta cero en la pared.

La velocidad máxima es, pues, proporcional al cuadrado del radio del tubo, así como al **cambio de presión por unidad de longitud**  $\frac{P_1 - P_2}{L}$  denominado gradiente de presión.



Consideremos el elemento de pared delgada siguiente:



El volumen de fluido  $dV$  que atraviesa los extremos de este elemento en un tiempo  $dt$  es:  $vdAdt$ , siendo  $v$  la velocidad correspondiente al radio  $r$  y  $dA$  el área rayada, igual a  $2\pi r dr$ . Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$dV = v dA dt \frac{P_1 - P_2}{4\mu L} (R^2 - r^2) * 2\pi r dr dt$$

El volumen que fluye a través de toda la sección se obtiene efectuado la integración extendida a todos los elementos desde  $r=0$  a  $r=R$ :

$$dV = \pi \frac{P_1 - P_2}{2\mu L} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr dt$$

$$\int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \int_0^R R^2 r dr - \int_0^R r^3 r dr = \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} = \frac{R^4}{4}$$

$$dV = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{P_1 - P_2}{L} dt$$

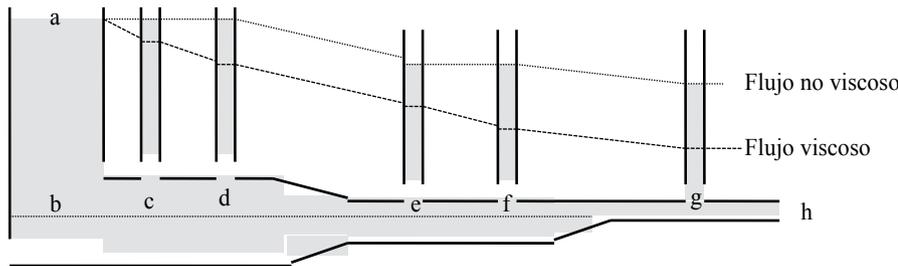
El caudal o gasto total del flujo por unidad de tiempo, designado por  $Q$  viene dado por:

$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{P_1 - P_2}{L}$$

Esta relación, deducida por primera vez por Poiseuille, se denomina **Ley de Poiseuille**.

El caudal es proporcional al gradiente de presión a lo largo del tubo y a la cuarta potencia del radio. Así por ejemplo si el radio se reduce a la mitad, el caudal queda dividido por 16.

Las diferencias de comportamiento entre un fluido no viscoso ideal y otro que tiene viscosidad se muestran a continuación:



Para el fluido ideal, se supone que este carece de viscosidad. La presión en  $b$  es aproximadamente la estática  $\rho gy$ , ya que la velocidad en el depósito grande es reducida.

La presión en  $c$  es menor que en  $b$  debido a que el fluido se acelera entre estos dos puntos. En  $c$  y  $d$ , sin embargo, las presiones son iguales, ya que la velocidad y la altura en estos puntos lo son también. Entre  $d$  y  $e$  hay una nueva caída de presión, lo mismo que entre  $f$  y  $g$ . La presión en  $g$  es la atmosférica, y en este punto la presión manométrica es nula.

Para un fluido viscoso, de nuevo la presión en  $b$  es casi estática  $\rho gy$ . Entre  $b$  y  $c$  hay caída de presión, que ahora se debe en parte a los efectos de viscosidad y hay también entre  $c$  y  $d$ . La caída entre  $d$  y  $e$  resulta en parte de la aceleración y en parte de la viscosidad. El gradiente de presión entre  $e$  y  $f$  es mayor que entre  $c$  y  $d$ , debido al menor radio de esta parte. Finalmente la presión en  $g$  es algo superior a la atmosférica, ya que existe un gradiente de presión entre este punto y el extremo del tubo.

## LEY DE STOKES

Consideremos un fluido que circula alrededor de una esfera o cuando una esfera se mueve a través de un fluido en reposo.

No intentaremos deducir directamente la expresión de la fuerza debida a la viscosidad.

Las únicas magnitudes de las que puede depender la fuerza son la viscosidad  $\mu$  del fluido, el radio  $r$  de la esfera y la velocidad  $v$  de esta respecto al fluido.

la fuerza  $F$  viene dada por:

$$F = 6\pi\mu r v$$

Esta ecuación fue deducida por primera vez por Sir George Stokes y se denomina *Ley de Stokes*.

Una esfera que cae en el interior de un fluido viscoso alcanza una *velocidad límite*,  $v_l$ , para la cual la fuerza retardadora de la viscosidad más el empuje hidrostático es igual al peso de la esfera.

Sea  $\rho$  la densidad de la esfera y  $\rho'$  la del fluido. El peso de la esfera será entonces  $W = mg = (4/3)\pi r^3\rho g$ , y el empuje  $(4/3)\pi r^3\rho'g$ .

Cuando se alcanza la velocidad límite, la fuerza total es nula, y:

Fuerza retardadora + Empuje = Peso de la esfera

$$6\pi\mu r v_l + 4/3 \pi r^3\rho'g = 4/3 \pi r^3\rho g$$

O bien:

$$v_l = \frac{2 r^2 g}{9 \mu} (\rho - \rho')$$

Midiendo la velocidad límite de una esfera de radio y densidad conocidos, puede hallarse, a partir de la ecuación anterior, la viscosidad del fluido en el cual cae.

Inversamente, si se conoce la viscosidad, puede determinarse el radio de la esfera midiendo la velocidad límite.

## CAPITULO V

### TEMPERATURA Y DILATACION

#### LA TEMPERATURA

Para describir los estados de equilibrio de sistemas mecánicos, así como para estudiar y predecir el movimiento de los cuerpos rígidos y de los fluidos, sólo ha sido preciso considerar tres magnitudes fundamentales: longitud, masa y tiempo.

Nos encontramos ahora, sin embargo, con una serie de fenómenos, denominados efectos térmicos o fenómenos caloríficos, que implican aspectos esencialmente no mecánicos y exigen para su descripción una cuarta magnitud fundamental, la temperatura. El concepto de temperatura es uno de los más intuitivos y primitivos para el hombre. Está relacionado con el clima, con la comida y la bebida, con el contacto físico, etc.

El sentido del tacto es la manera más sencilla de distinguir a los cuerpos calientes de los cuerpos fríos. Por medio del tacto, podemos ordenar a los cuerpos según su grado de calor, decidiendo que A está más caliente que B, B que C, etc. Podemos mirarnos entre la gente alrededor y ver como andamos abrigados de diferente manera en un día de sol. Decimos que tal es nuestro sentido de la temperatura.

Se trata de un modo muy subjetivo para determinar la temperatura de un cuerpo, y desde luego no es muy útil para los propósitos de la ciencia. Un experimento realizado por Jhon LOCKE, prueba lo incierto de éste método. Si una persona sumerge una mano en agua caliente y la otra en agua fría, luego simultáneamente mete ambas manos en agua tibia; ésta le parecerá mas fría a la primera mano y más caliente a la segunda.

La física como siempre, trata de ordenar las sensaciones y eliminar la subjetividad en la interpretación de los fenómenos.

#### EL EQUILIBRIO TÉRMICO Y LA LEY CERO DE LA TERMODINAMICA

Hemos visto que nuestro juicio de la temperatura puede estar bastante equivocado. Lo que necesitamos es una medida objetiva y numérica de la temperatura. Tratemos de entender el significado de la temperatura.

Pongamos en contacto entre sí a dos objetos, uno A que se sienta frío al contacto de la mano y otro idéntico B, pero que se sienta caliente. Después de un tiempo suficiente, A y B producen la misma sensación de temperatura. Entonces se dice que A y B están en equilibrio térmico entre si.

La prueba lógica y práctica para determinar el equilibrio térmico es usar un tercer cuerpo, o cuerpo de prueba, como un termómetro.

Esto se resume en un postulado que se suele llamar la Ley Cero de la Termodinámica: *Si A y B están en equilibrio térmico con un tercer cuerpo C ("el termómetro"), entonces A y B están en equilibrio térmico entre sí.*

Esta idea expresa la idea de que la temperatura de un sistema es una propiedad tal que su valor final es el mismo que el de otros sistemas, cuando todos ellos se ponen en contacto. La idea contenida en la Ley Cero, aunque sencilla no es obvia; dos trozos de hierro atraen un imán, pero no necesariamente se atraen entre sí.

Una manera mas formal de expresar la Ley Cero es: "*Existe una cantidad útil llamada temperatura*", que es una propiedad de los sistemas termodinámicos, tal que la *igualdad de temperaturas* es una condición necesaria y suficiente para que exista *equilibrio térmico*. En rigor de verdad, la parte esencial de la Ley Cero es: "*Existe una cantidad útil llamada temperatura...*".

## DEDIDAS DE LA TEMPERATURA

Existen muchas propiedades físicas medibles que varían al hacerlo nuestra percepción fisiológica de la temperatura.

En los cuerpos, existe una propiedad relacionada con la temperatura, es decir *algo que se modifica* cuando ése cuerpo se encuentra más caliente o menos caliente.

Sabemos que una varilla de metal resulta ser tanto más larga, cuando más caliente se la hace. Este efecto es conocido por los constructores de líneas férreas, que les colocan dejando espacios vacíos entre una riel y otra, para tener en cuenta precisamente las variaciones de temperatura entre el día y la noche. También se utiliza este fenómeno en la industria mecánica para acoplar piezas de un rotor.

En el rango de las temperaturas de la vida ordinaria se han impuesto los termómetros cuya sustancia termométrica es un líquido, generalmente mercurio o alcohol coloreado, contenido en un tubo de vidrio.

Estos termómetros son de manejo más práctico, debido a que la dilatación de los líquidos es mayor a la de los sólidos.

Supóngase que se ha escogido una *sustancia termométrica*. Representemos con  $X$  la propiedad termométrica. Arbitrariamente se escoge la siguiente función lineal de la propiedad  $X$  de la temperatura:

$$T_{(X)} = a x$$

Donde,  $a$  es una constante que hay que evaluar.

Se ha predeterminado que cuando las diferencias de temperaturas son iguales, o a iguales intervalos de temperatura, les corresponden cambios iguales en  $x$ . Por ejemplo esto significa que cada vez que la columna de mercurio en un termómetro de vidrio y mercurio cambie su longitud en una unidad, la temperatura cambia en una cantidad definida fija, sin importar cual era su temperatura inicial.

Se deduce también que dos temperaturas medidas con el mismo termómetro están en la misma relación que la de los valores en  $x$ :

$$\frac{T_{x1}}{T_{x2}} = \frac{x_1}{x_2}$$

Para determinar la constante  $a$ , y por lo tanto para *calibrar el termómetro*, se debe especificar un *punto patrón fijo* en el que todos los termómetros deban indicar la misma temperatura.

Este punto fijo se selecciona como aquel en el que el hielo, el agua, y el vapor de agua coexisten en equilibrio y reciben el nombre de *punto triple del agua*. Este estado puede lograrse sólo a una presión definida y es único. (La presión de vapor del agua en éste punto es de 4.58 mmHg).

La temperatura en éste punto patrón fijo se seleccionó en forma arbitraria como 273.16 °K. Tiempo después (1967, 10° Conferencia de Pesos y Medidas) el "grado Kelvin" (°K) fue reemplazado por el kelvin (K) y la unidad de temperatura termodinámica se definió de la siguiente manera: La unidad termodinámica de

temperatura que es el Kelvin es la fracción  $1/273.16$  de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.

En cualquier termómetro:

$$\frac{T_x}{T_{x_{tr}}} = \frac{x}{x_{tr}}$$

Donde  $t_r$  (subíndice) representa el punto triple.

Y, para todos los termómetros:

$$T(x_{tr}) = 273.16 \text{ K}$$

$$T_x = 273.16 \text{ K} \frac{x}{x_{tr}}$$

Esta ecuación puede aplicarse a diferentes termómetros. En un termómetro de un líquido en vidrio,  $x$  es la longitud  $L$  de la columna de líquido, es decir:

$$T_x = 273.16 \text{ K} \frac{L}{L_{tr}}$$

Para una gas a presión constante:

$$T_x = 273.16 \text{ K} \frac{V}{V_{tr}}$$

(a  $P = \text{constante}$ )

Para un termómetro de resistor de platino,  $x$  es la resistencia eléctrica  $R$ :

$$T_x = 273.16 \text{ K} \frac{R}{R_{tr}}$$

Y así sucesivamente para otras sustancias y propiedades termométricas.

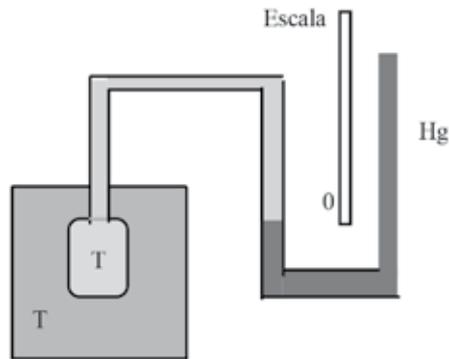
## TIPOS DE TERMODINAMICA

A más del termómetro corriente de líquido encerrado en recipiente de vidrio, el cual utiliza la diferencia de dilataciones del líquido y del vidrio, existen otro tipo de termómetros.

El termómetro de gas a volumen constante, utiliza los cambios de presión de un gas cuyo volumen se mantiene constante.

La propiedad termométrica de éste termómetro es la presión a volumen constante.

Este termómetro consiste en una ampolla de vidrio, porcelana, cuarzo, platino o platino iridiado (según los límites de temperatura entre los cuales vaya a usarse). Esta ampolla se conecta por medio de un tubo capilar a un manómetro de mercurio.



Cuando se eleva la temperatura del gas, éste se dilata, obligando al mercurio a descender en el tubo de la izquierda y a elevarse en el tubo de la derecha.

La presión del gas encerrado en la ampolleta es la diferencia de las alturas de las columnas de mercurio  $\rho gh$  más la presión atmosférica.

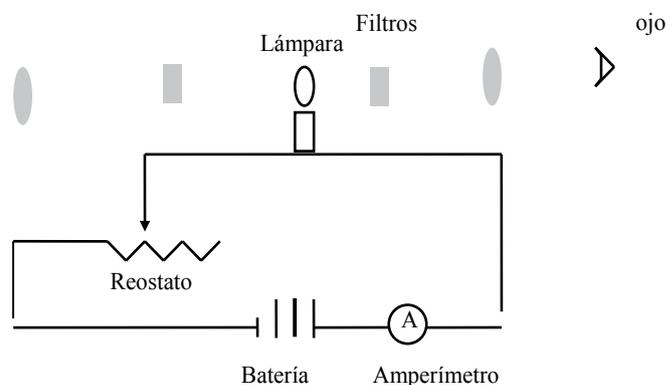
En la práctica el aparato es muy complicado, y se deben hacer algunas correcciones: (1) se debe tener en cuenta el *pequeño cambio de volumen* debido a una ligera contracción o expansión en la ampolleta; (2) se debe considerar el hecho de que *no todo el gas encerrado* (como el que está en el capilar) ha sido sumergido en el baño.

Supongamos que se han hecho todas estas correcciones, y sea  $P$  el valor corregido de la presión a la temperatura del baño, entonces la temperatura viene dada por:

$$T_x = 273.16 K \frac{P}{P_{tr}}$$

A volumen = constante

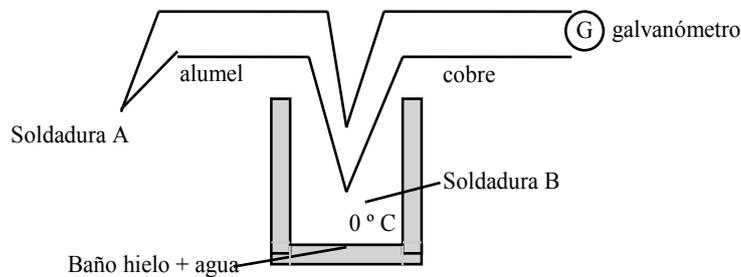
Un otro tipo de termómetro es el *pirómetro óptico*, que se utiliza a temperaturas superiores a las de los puntos de fusión de los metales, ya que no es necesario poner en contacto ninguna parte del aparato con el cuerpo caliente.



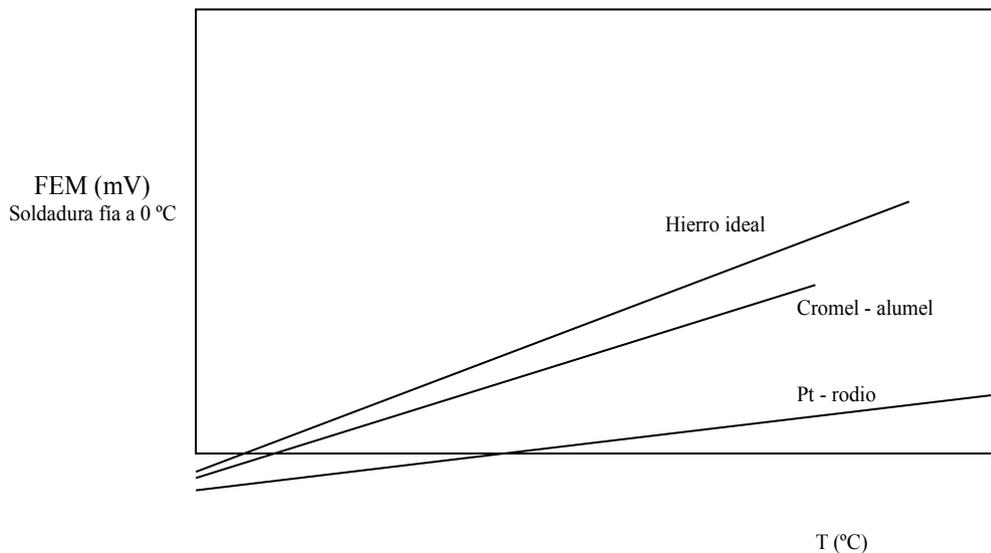
Cuando el pirómetro se halla dirigido por ejemplo a un horno, se ve el filamento de la lámpara oscuro contra el fondo brillante del horno.

Se conecta la lámpara a una batería y a un reostato, y haciendo girar el mando del reostato puede aumentarse gradualmente la corriente que pasa por el filamento, y con ello su brillo hasta que sea igual al fondo. Calibrando previamente el instrumento a ciertas temperaturas conocidas, puede graduarse la escala del amperímetro de modo que se lea directamente la temperatura.

El *par termoeléctrico* consiste en un circuito eléctrico, en el que se sueldan dos hilos de metales distintos, formando un circuito cerrado. Se origina una fuerza electromotriz, FEM, siempre que las soldaduras A y B estén a distintas temperaturas.



Una soldadura se pone en contacto con el cuerpo cuya temperatura se quiere medir, manteniendo la otra a temperatura conocida (0°C) y midiendo la FEM mediante un galvanómetro.



Estos termómetros se utilizan a temperaturas muy bajas o muy elevadas; ya que el termómetro de mercurio queda limitado debido a que el mercurio se solidifica a - 40 °C y su presión de vapor se hace demasiado alta a temperaturas por encima de 360 °C.

Sin embargo para utilizar el termómetro de vidrio a bajas temperaturas se puede utilizar empleando líquidos como el propanol, el pentano, que se solidifican a -127 °C y a -130 °C respectivamente.

## LAS ESCALAS DE TEMPERATURAS

Dos escalas comunes de temperaturas son la *Celsius* (hasta 1948 denominada centígrada) y la escala *Fahrenheit*.

Estas escalas se pueden definir en términos de la escala Kelvin, que es la escala fundamental de temperaturas usada en la ciencia.

La escala de temperaturas *Celsius* usa la unidad *grado Celsius* ( $^{\circ}\text{C}$ ) que es igual a la unidad *Kelvin*.

La temperatura en la escala kelvin se calcula mediante:

$$T_{(\text{K})} = T_{(^{\circ}\text{C})} + 273.15$$

El punto triple del agua, por definición, corresponde a:

$$T_{(^{\circ}\text{C})} = T_{(\text{K})} - 273.15$$

$$T_{(^{\circ}\text{C})} = 273.16 - 273.15$$

$$T_{\text{tr}} = 0.01 \text{ } ^{\circ}\text{C}$$

Experimentalmente se encuentra que la temperatura a la cual *el hielo y el agua saturada* de aire están en equilibrio a la presión atmosférica (el llamado *punto de fusión* normal del hielo) es de  $0.00 \text{ } ^{\circ}\text{C}$  y que la temperatura a la cual *el vapor y el agua líquida* están en equilibrio a 1 atmósfera de presión (el llamado *punto de ebullición* normal del agua) es de  $100.00 \text{ } ^{\circ}\text{C}$ .

Estas son las dos temperaturas de referencia para definir la escala Celsius.

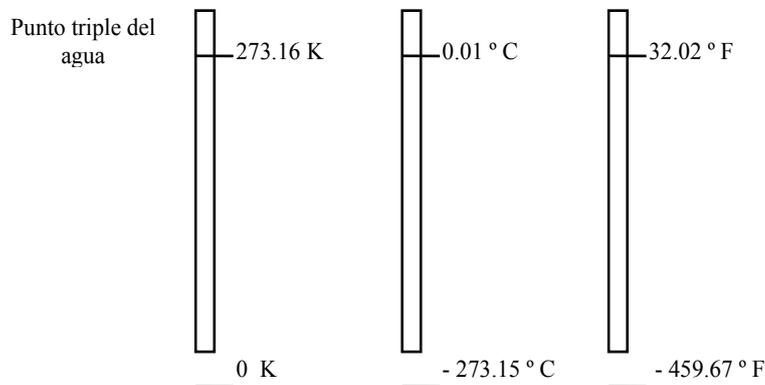
La escala *Fahrenheit*, de uso común en algunos países de habla inglesa, no se usa en el trabajo científico. La relación entre las escalas Fahrenheit y Celsius se define como:

$$T_{^{\circ}\text{C}} = \frac{[T_{^{\circ}\text{F}} - 32]}{1.8}$$

La temperatura *Rankine* está relacionada con la escala Fahrenheit por:

$$T_{(\text{R})} = T_{(^{\circ}\text{F})} + 459.67$$

Podemos concluir que el punto de fusión del hielo ( $0.00 \text{ } ^{\circ}\text{C}$ ) es igual a  $32 \text{ } ^{\circ}\text{F}$  y que el punto de ebullición del agua ( $100.00 \text{ } ^{\circ}\text{C}$ ) es igual a  $212.0 \text{ } ^{\circ}\text{F}$  y que un grado Celsius es exactamente  $9/5$  de un grado Fahrenheit.



El *cero absoluto* corresponde a la más baja temperatura (0 K) y no existen temperaturas menores a ésta.

El cero absoluto de la temperatura ha desafiado a todos los intentos experimentales para alcanzarlo, aunque es posible arbitrariamente acercarse a él. Es posible preparar sistemas que tengan *temperaturas negativas*; por sorprendente que parezca, éstas temperaturas no se logran pasando por 0 K, sino haciendo un rodeo por temperaturas infinitas. Es decir que las temperaturas negativas no representan *fríos menores* que el del cero absoluto, sino *calores mayores* que los de temperaturas infinitas. El cero absoluto continúa siendo experimentalmente inalcanzable.

No debe pensarse que el cero absoluto es un estado que no tenga energía ni movimiento.

La concepción de que toda la acción molecular cesaría en el cero absoluto es incorrecta. En el cero absoluto la energía molecular es mínima, pero no es cero.

Algunas temperaturas en K	
Reacción termonuclear del C	$5 \times 10^8$
Interior del sol	$10^7$
Corona solar	$10^6$
Superficie solar	$6 \times 10^3$
Ebullición del He a la presión baja alcanzable	$3 \times 10^{-1}$
Desmagnetización adiabática de los núcleos	$10^{-6}$

*Cero absoluto*: Es la temperatura la más baja posible, a la cual una sustancia no contiene ninguna energía térmica. (Stephen W. Hawking).

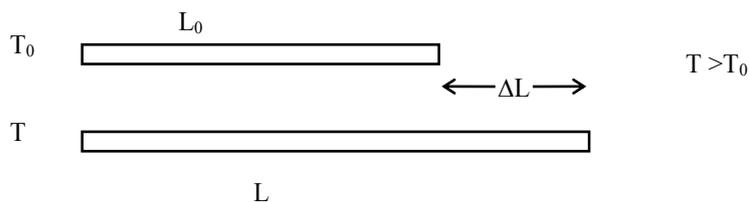
## LA DILATACIÓN TÉRMICA.- DILATACIÓN LINEAL

Los efectos comunes de los cambios de temperatura consisten en cambios correspondientes en el tamaño y en el estado de los materiales.

Vamos a considerar los cambios en el tamaño que ocurren sin que ocurran cambios de estado. Con algunas pocas excepciones las dimensiones de todos los cuerpos aumentan cuando se eleva su temperatura.

Veamos como varía *la longitud* de un sólido con un aumento en la temperatura.

Consideremos una barra cuya longitud es  $L_0$  a determinada temperatura de referencia  $T_0$ , y que pasa a ser  $L$  a una temperatura superior  $T$ .



La diferencia  $\Delta L = L - L_0$  es el aumento de longitud de la barra debido al aumento de temperatura o calentamiento.

Experimentalmente se encuentra que el aumento de longitud,  $\Delta L$ , es proporcional a la longitud inicial,  $L_0$  y muy aproximadamente proporcional al aumento de temperatura,  $T - T_0$ , o sea  $\Delta T$ . Por lo tanto podemos escribir:

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$$

Donde  $\alpha$  se denomina *coeficiente de dilatación lineal*, y tiene valores diferentes para materiales distintos.

Reescribiendo ésta ecuación, tenemos:

$$\alpha = \frac{1}{L_0} \frac{\Delta L}{\Delta T} [=] \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}, \text{ } ^\circ\text{F}^{-1}$$

De modo que  $\alpha$  representa *el cambio fraccional* de la longitud por cada cambio de un grado en la temperatura.

como:  $\Delta L = L - L_0$ ; despejando L:

$$L = L_0(1 + \alpha \Delta T)$$

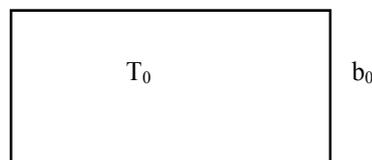
El coeficiente de dilatación de una sustancia que tiene forma de barra, se determina marcando dos líneas en sus extremos y midiendo el desplazamiento de cada línea con un microscopio mientras se hace variar la temperatura en una cantidad determinada.

Los coeficientes de dilatación se presentan en tablas a partir de datos experimentales:  $\alpha_{(\text{Al})} = 2.3 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ ;  $\alpha_{(\text{vidrio})} = 9 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ ;  $\alpha_{(\text{acero})} = 1.1 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ .

## DILATACIÓN SUPERFICIAL Y CUBICA

Cuando se calienta una lámina de material, aumenta, tanto *su longitud* como su *anchura*.

Consideremos una lámina rectangular cuya longitud y anchura, a la temperatura  $T_0$  son  $L_0$  y  $b_0$  respectivamente.



Si la lámina se calienta a la temperatura  $T$ , éstas dimensiones se convierten en:

$$L = L_0(1 + \alpha \Delta T) \quad ; \quad b = b_0(1 + \alpha \Delta T)$$

Donde:  $\Delta T = T - T_0$

Su área después de calentada será:

$$A = L * b = L_0 * b_0(1 + \alpha \Delta T)^2$$

$$A = L_0 * b_0 [1 + 2 \alpha \Delta T + \alpha^2 \Delta T^2]$$

Sin embargo, el área inicial es:  $A_0 = L_0 \cdot b_0$ .

Con lo que:

$$A = A_0 [1 + 2 \alpha \Delta T + \alpha^2 \Delta T^2]$$

$\alpha$ , normalmente tiene un valor numérico pequeño,  $\alpha^2$  será extraordinariamente pequeño y el término  $\alpha^2 \Delta T^2$  puede despreciarse:

$$A = A_0 [1 + 2 \alpha \Delta T]$$

Si definimos, un coeficiente de dilatación superficial,  $\gamma = 2\alpha$ .

$$A = A_0 [1 + \gamma \Delta T]$$

Es decir, el coeficiente de dilatación superficial es doble que el coeficiente de dilatación lineal.

La ecuación anterior se cumple para una lámina de forma cualquiera. Por ejemplo si la lámina tiene un orificio, el área del orificio se dilata en la misma proporción que el material que lo rodea; ocurre lo mismo con cualquier línea, ya sea recta o curva.

Consideremos un bloque macizo que tenga la forma de un paralelepípedo recto rectangular, es fácil demostrar:

$$V = V_0 (1 + 3\alpha \Delta T)$$

Si definimos un coeficiente de dilatación cúbica:

$$\beta = 3\alpha$$

$$V = V_0 (1 + \beta \Delta T)$$

Ecuación que se cumple independientemente de la forma del cuerpo.

Como la forma de un fluido no está definida, solamente tiene sentido hablar del cambio del volumen con la temperatura.

La ecuación  $V = V_0 (1 + 3\alpha \Delta T)$  se utiliza también para calcular la dilatación de un líquido, despejando de la ecuación anterior:

$$\beta = \frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta T}$$

Los líquidos se caracterizan por dilatarse al aumentar la temperatura, siendo su dilatación volumétrica unas 10 veces mayor que la de los sólidos.

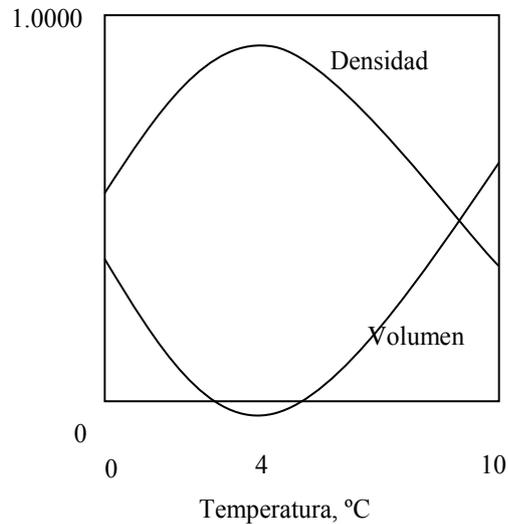
Sin embargo el líquido más común el agua, no se comporta como los otros líquidos.

En el intervalo de temperaturas entre 0 y 4 °C *disminuye* el volumen al crecer la temperatura. Comportamiento contrario al de la mayor parte de las sustancias. Esto es entre 0 y 4 °C el coeficiente de dilatación del agua es negativa. Por encima de 4 °C, el agua se dilata cuando se calienta. Puesto que el volumen de una masa dada de agua es más pequeño a 4 °C que a cualquier otra temperatura, la densidad del agua es máxima a 4 °C, donde su valor es de 1000 kg/m<sup>3</sup> (en realidad a 3.98 °C

Cuando un lago se enfría, el agua fría de la superficie fluye hacia el fondo a causa de su mayor densidad. Pero cuando la temperatura llega a los 4 °C este flujo cesa y el agua cercana a la superficie permanece fría (y

menos densa) que la del fondo. Si la superficie se congela, el hielo flota debido a que tiene menor densidad que el agua. El agua del fondo permanece a 4 °C hasta que casi toda la masa se ha congelado.

Si el agua se comportase como la mayoría de las sustancias, contrayéndose continuamente al enfriarse y congelarse, los lagos se helarían desde el fondo hacia arriba.



## FATIGAS DE ORDEN TERMICO

Si los extremos de una barra están fijos rígidamente, de modo que no sea posible la dilatación o la contracción, y se modifica la temperatura de la barra se producen en ésta *fatigas tensoras o compresoras*, llamadas *fatigas de orden térmico*, que pueden llegar a ser muy grandes originando en la barras esfuerzos que sobrepasen el límite de elasticidad e inclusive el de ruptura.

En consecuencia, al proyectar cualquier estructura que haya de estar expuesta a cambios de temperatura ha de tomarse alguna precaución contra la dilatación.

En un tubo largo de conducción de vapor, ello se logra intercalando *juntas de dilatación*, o bien se da a una parte del tubo forma de "U".

En los puentes grandes, uno de los extremos puede sujetarse rígidamente a su estribo mientras el otro descansa sobre rodillos.

Supongamos una barra a la temperatura T, tiene sus extremos rígidamente fijos y que mientras se mantiene así, se reduce la temperatura a un valor menor T<sub>0</sub>.

La variación relativa de longitud, si la barra pudiera contraerse libremente sería:

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$$

$$\Delta L/L_0 = \alpha (T - T_0)$$

Puesto que la barra *no puede contraerse*, la *tensión ha de aumentar* hasta un valor suficiente para producir la misma variación relativa de longitud. Pero, en virtud de la definición del *módulo de Young*:

$$Y = \frac{\textit{Fatiga}}{\textit{Deformacion unitaria}}$$

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L_0}$$

Reemplazando  $\Delta L/L_0$ :

$$Y = \frac{F/A}{\alpha(T - T_0)} = \frac{F/A}{\alpha \Delta T}$$

De donde:

$$F = A Y \alpha \Delta T$$

Que nos da la tensión en la barra. La fatiga de la misma es:

$$\frac{F}{A} = Y \alpha \Delta T$$

Donde Y es el módulo de Young.

## CAPITULO VI

### CANTIDAD DE CALOR

Cuando se juntan dos sistemas cuyas temperaturas son diferentes, la temperatura final que ambos alcanzan tiene un valor comprendido entre las dos temperaturas iniciales.

Hasta principios del siglo XIX, tales fenómenos se explicaban postulando que en todos los cuerpos existía una sustancia el calórico.

Cuando los dos cuerpos se ponían en contacto, el cuerpo *rico en calórico* cedía algo de él al otro, hasta que la temperatura de ambos cuerpos fuese la misma.

La teoría del calórico podía describir de una manera satisfactoria muchos procesos, tales como la conducción del calor o la mezcla de sustancias en un calorímetro.

Sin embargo, el concepto de que *el calor era una sustancia*, no pudo en última instancia resistir las pruebas experimentales. El abandono de la teoría del calórico forma parte del avance general de la física.

Finalmente se llegó a entender por completo que *el calor es una forma de energía y no una sustancia*.

Fue Joule quién demostró experimentalmente que cuando una cantidad dada de *energía mecánica* se transformaba en *calor*, se obtenía siempre la misma cantidad de éste. Así quedó definitivamente establecida la equivalencia del calor y el trabajo como dos formas de energía.

Un segundo concepto termodinámico, estrictamente ligado al concepto de temperatura, es *el calor*. En éste párrafo analizaremos sus propiedades y su forma de medición.

El calor es una cosa intangible, y una unidad de calor no es algo que pueda conservarse en un laboratorio de medidas.

*La cantidad de calor* que interviene en un proceso se *mide por algún cambio* que acompaña a éste proceso; y una *unidad de calor* se define como el calor necesario para producir alguna transformación.

Citaremos tres de ésta unidades:

- a) *La kilocaloría o caloría kilogramo*, es la cantidad de calor que ha de suministrarse a 1 Kg de agua, para elevar su temperatura en 1 °C (14.5 °C a 15.5 °C).
- b) *La caloría o caloría gramo* es la cantidad de calor que ha de suministrarse 1 gr de agua, para elevar su temperatura en 1 °C (14.5 °C a 15.5 °C).
- c) *La Unidad Térmica Británica, BTU* es la cantidad de calor que ha de suministrarse a 1 libra de agua, para elevar su temperatura en 1 °F(63 °C a 64 °C).

Las unidades de calor están relacionadas como sigue:

$$1 \text{ BTU} = 252 \text{ calorías} = 0.252 \text{ Kcal}$$

$$1\ 000\ \text{cal} = 1\ \text{Kcal}$$

Incidentalmente, "la caloría" que se usa para medir el contenido energético de los alimentos es en realidad una kilocaloría.

## CAPACIDAD CALORÍFICA Y CALOR ESPECÍFICO

Las sustancias difieren entre sí en la *cantidad de calor que se necesita* para producir, en una masa dada, un determinado aumento en su temperatura.

La relación de calor  $Q$  al correspondiente incremento de temperatura  $\Delta T$  se denomina *capacidad calorífica* del cuerpo, es decir:

$$C = \text{capacidad calorífica} = \frac{Q}{\Delta T}$$

Si hacemos  $\Delta T=1$ , vemos que la capacidad calorífica de un cuerpo es numéricamente igual a la cantidad de calor que hay que suministrarle para incrementar en un grado su temperatura.

Para obtener una cifra que sea característica de la sustancia de que está hecho el cuerpo, se defina la *capacidad calorífica específica o calor específico*, es decir:

$$c = \frac{\text{capacidad calorífica}}{\text{masa}} = \frac{Q}{m \Delta T}$$

"De ésta manera, tan correcto es hablar de la capacidad calorífica de una moneda, como del calor específico del cobre".

Ni la capacidad calorífica de un cuerpo ni el calor específico de un material son constantes, sino que dependen de la ubicación del intervalo de temperatura escogido. La ecuación anterior sólo proporciona valores promedio de éstas cantidades en el intervalo de temperaturas  $\Delta T$ .

Las unidades del calor específico equivalente son:

$$1 \frac{\text{kcal}}{\text{kg } ^\circ\text{C}} = 1 \frac{\text{cal}}{\text{gr } ^\circ\text{C}} = \frac{\text{btu}}{\text{lb } ^\circ\text{F}}$$

El calor que se debe suministrar a un cuerpo de masa  $m$ , cuyo calor específico es  $c$ , para aumentar su temperatura en  $\Delta T$ , es:

$$Q = \sum_{T_i}^{T_f} (m c \Delta T)$$

En el límite diferencial ( $\Delta T \rightarrow 0$ ):

$$Q = m \int_{T_i}^{T_f} c dT$$

Donde  $c$  es una función de la temperatura, y ha de conocerse ésa función, para realizar la integración.

A las temperaturas anteriores y en intervalos no demasiado grandes, los calores específicos suelen considerarse constantes.

Si la sustancia de la cual se desea medir su calor específico, se calienta a presión constante, se obtiene el *calor específico a presión constante*  $c_p$ . de igual manera si se calienta manteniendo el volumen constante se obtiene el calor específico a volumen constante  $c_v$ :

$$Q = m c_p \Delta T \quad ; \quad Q = m c_v \Delta T$$

## CAPACIDADES CALORÍFICAS MOLARES DE LOS SÓLIDOS

Los calores específicos de los sólidos varían mucho de un material a otro.

Sin embargo la situación es bastante diferente si comparamos muestras de materiales que contienen el *mismo número de moléculas* en vez de comparar muestras que tengan la misma masa. Esto puede lograrse expresando los calores específicos en  $cal/(molgr \text{ } ^\circ C)$  (capacidades caloríficas molares) en vez de  $cal/(gr \text{ } ^\circ C)$ .

Dulong y Petit señalaron que las capacidades caloríficas molares de todos los metales, con muy pocas excepciones (el carbono por ejemplo  $\neq 6$ ) tenían valores cercanos a  $6 cal/(molgr \text{ } ^\circ C)$ .

La capacidad calorífica molar, se obtiene multiplicando el calor específico por el peso molecular:

$$C_{p,cu} = 0.093 \frac{cal}{gr \text{ } ^\circ C} * 63.5 \frac{gr}{1 molgr}$$

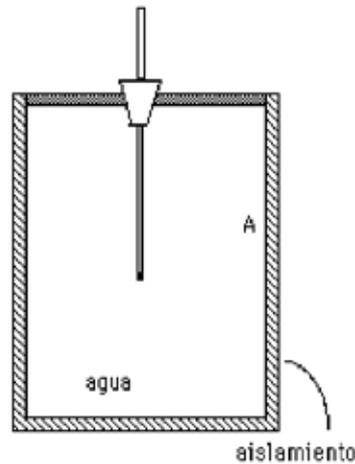
$$C_{p,cu} = 5.86 \frac{cal}{molgr \text{ } ^\circ C}$$

Las capacidades caloríficas molares reales varían con la temperatura, *tendiendo a cero* conforme  $T \rightarrow 0 K$  y *tendiendo al valor de Dulong y Petit* conforme  $T \rightarrow$  infinito.

Finalmente anotamos que cuando se trata de gases, es más conveniente expresar el calor específico tomando como unidad de masa la molécula gramo y no el gramo, es decir  $C_p$  debe expresarse en  $cal/(molgr \text{ } ^\circ C)$ .

## MEDIDAS DE CALORES ESPECÍFICOS

Los calores específicos de las sustancias, pueden medirse en un *calorímetro*. El más común el *calorímetro de agua*, en su forma más sencilla consiste en una vasija metálica A, de paredes delgadas, cuya superficie exterior está niquelada y rodeada de un aislamiento.



La vasija contiene una cantidad conocida de agua y está provista de una tapa a través de la cual pasa un termómetro.

Si leemos el termómetro antes y después que una cantidad  $Q$  desconocida de calor se haya introducido en el calorímetro puede determinarse  $Q$  a partir de la elevación de temperatura producida.

$$Q = m C_P (T_2 - T_1)$$

$$C_{P,agua} = 1 \frac{cal}{gr \text{ } ^\circ C}$$

Para medir el calor específico de una sustancia se puede emplear el *calorímetro de agua*.

Una muestra de la sustancia  $m_s$  cuyo calor específico  $c_s$ , se desea medir, se calienta en un baño (a vapor) hasta una temperatura conocida  $T_s$ .

Se agita el agua del calorímetro y se mide su temperatura. Se introduce entonces rápidamente, la muestra en el calorímetro, se agita de nuevo el agua, se mide otra vez su temperatura. Si  $T_1$  y  $T_2$  son las temperaturas iniciales y final del agua y:

$m_w$  = masa del agua,  
 $m_c$  = masa del calorímetro,  
 $c_c$  = calor específico del calorímetro.

El *calor transferido o cedido por la muestra* al enfriarse desde  $T_s$  a  $T_2$  ha de ser igual al calor ganado por el agua y el vaso calorimétrico. Si se supone que no existen pérdidas de calor:

Calor cedido = calor ganado + calor ganado  
 por la muestra por el agua por el calorímetro

$$m_s c_s (T_s - T_2) = m_w c_w (T_2 - T_1) + m_c c_c (T_2 - T_1)$$

$$C_{P,agua} = 1 \frac{cal}{gr \text{ } ^\circ C}$$

$$m_s c_s (T_s - T_2) = (m_w c_w + m_c c_c) (T_2 - T_1)$$

$$m = \frac{(m_w + m_c C_c) (T_2 - T_1)}{m_s (T_s - T_2)}$$

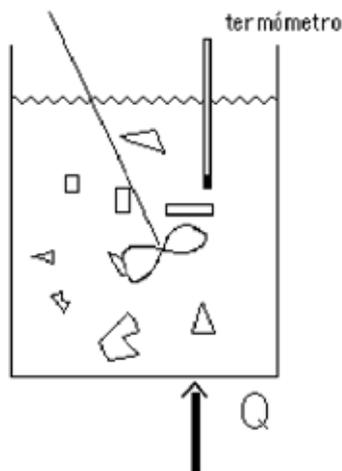
## CAMBIOS DE ESTADO

Sabemos que la materia, puede existir en estado sólido, líquido o gaseoso. Por ejemplo el agua existe en el estado sólido (hielo), en estado líquido (agua) y en estado gaseoso (vapor).

Siempre que no se descompongan a elevadas temperaturas todas las sustancias pueden existir en cualquiera de los tres estados cuando se encuentran en condiciones adecuadas de presión y temperatura.

*Los cambios de estado* van acompañados de *absorción o desprendimiento de calor* y ordinariamente de cambios de volumen.

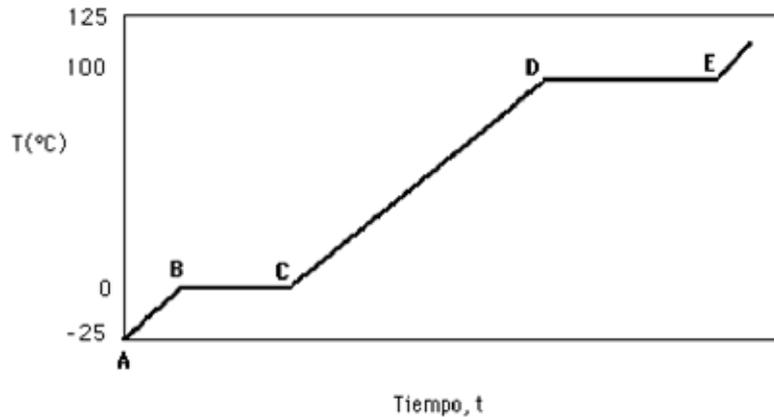
Supongamos que se toma hielo de un frigorífico a la temperatura de  $-25^{\circ}\text{C}$ , se tritura y se coloca en un recipiente en el cual se introduce un termómetro.



Imaginemos que se suministra calor al sistema en forma constante (y que el hielo no recibe calor de otra fuente). Se observará que la temperatura del hielo aumenta continuamente (A→B) hasta que la temperatura ha llegado a  $0^{\circ}\text{C}$ .

Tan pronto como se ha alcanzado ésta temperatura, se observará algo de agua líquida en el recipiente. Es decir el hielo empieza a fundirse. *La fusión* es un cambio de estado del *sólido a líquido*.

Aunque se suministre calor al mismo ritmo que antes, la temperatura se mantendrá en  $0^{\circ}\text{C}$  hasta que todo el hielo se haya fundido (punto C) (La mezcla de hielo y agua ha de mantenerse en agitación constante).



Tan pronto como se haya fundido el última porción de hielo, la temperatura comenzará nuevamente a elevarse a un ritmo constante (mas lento que de A-B por  $c_{p, \text{agua}} > c_{p, \text{hielo}}$ ). Cuando se haya alcanzado la temperatura de 100 °C (punto D), comenzarán a escapar de la superficie burbujas de vapor (vapor de agua), el agua empieza a hervir.

La temperatura permanecerá constante en 100 °C hasta que desaparezca la última gota de agua. Ha tenido lugar otro cambio de estado *la ebullición*, el agua ha pasado del estado líquido al gaseoso.

Si se hubiese recogido todo el vapor de agua (se hubiese necesitado un gran recipiente), el proceso de calentamiento podría continuarse de E a F y el gas habría recibido el nombre de *vapor recalentado*.

La temperatura a la cual funden los sólidos cristalinos cuando se les suministra calor a la presión atmosférica, se denomina *punto normal de fusión*, y la temperatura a la cual hierven los líquidos cuando se les suministra calor a la presión atmosférica se denomina *punto normal de ebullición*.

## CALORES LATENTES

La cantidad de calor por unidad de masa que ha de suministrarse a una sustancia en su punto de fusión para convertirla completamente en líquido a la misma temperatura, se denomina *calor de fusión*.

La cantidad de calor por unidad de masa que ha de suministrarse a una sustancia en su punto de ebullición para convertirla completamente en gas a la misma temperatura, se denomina *calor de vaporización*.

Los calores de fusión y de vaporización se expresan en cal/gr (BTU/lb). Así el calor de fusión del hielo es de 80 cal/gr y el calor de vaporización del agua es de 539 cal/gr.

Cuando se sustrae calor a un gas su temperatura desciende, y a la temperatura de ebullición vuelve al estado líquido, es decir *se condensa*.

*El calor* que devuelve el gas al condensarse, es exactamente igual al que gastó para evaporarse. Este calor devuelto por unidad de masa se denomina *calor de condensación*.

De igual manera, el líquido vuelve al estado sólido, se solidifica, cuando se enfría hasta la temperatura de fusión, y cede el llamado *calor de solidificación*, y que es igual al de fusión.

El calor absorbido o liberado en el cambio de estado, se denomina *calor latente Q*:

$$Q = m \lambda \quad ; \quad \lambda = Q/m$$

$\lambda_f$  = calor de fusión a  $T_f$ . [=] cal/molgr

$\lambda_v$  = calor de vaporización a  $T_b$ .

## CAPITULO VII

## TRANSMISION DE CALOR

## CONDUCCIÓN

Uno de los primeros investigadores fue Franklin, quien registró una serie de observaciones sobre la conductividad térmica de los materiales metálicos, cerámicos y de madera, con una particular referencia a las asas de las teteras.

Newton propuso que la velocidad de enfriamiento de un cuerpo era proporcional a la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y sus alrededores. Scheele observó que el calor de una estufa podía desplazarse a través del aire sin calentarlo, pudiendo sin embargo, ser absorbido por un vidrio.

Cuando dos objetos que están a temperaturas diferentes se ponen en contacto térmico, el calor fluye desde el objeto más caliente hacia el más frío. El flujo neto se produce siempre en el sentido de temperaturas decrecientes.

Si un extremo de una barra metálica se coloca en una llama mientras el otro se sostiene con la mano, se observará que ésta parte de la barra se va calentando cada vez más aunque no este en contacto directo con la llama.

Esta clase de flujo calorífico se denomina *conducción molecular* o simplemente conducción.

Las moléculas del extremo caliente, al elevarse la temperatura, aumentan la violencia de su vibración; entonces cuando chocan con sus vecinas (que se mueven más lentamente), parte de su energía cinética es compartida con ellas y la transmiten a su vez a las situadas más lejos de la llama.

El calor puede ser conducido a través de sólidos, líquidos y gases. El calor se conduce a causa de la transferencia de energía de movimiento entre moléculas adyacentes.

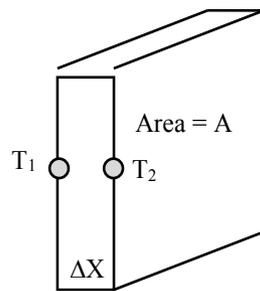
Es bien sabido que los metales son buenos conductores de la electricidad y así mismo buenos conductores del calor.

La transmisión del calor puede únicamente ocurrir cuando existe una diferencia de temperaturas.

Esto es, si el calor pasa de un cuerpo a otro, cuando ambos se encuentran en contacto, la temperatura del primero es, por definición, mayor que la del segundo.

## CONDUCCIÓN DE CALOR A TRAVES DE UNA LAMINA PLANA

Consideremos una lámina de un material cuya sección transversal tenga un área  $A$  y un espesor  $\Delta X$ , cuyas caras se mantienen a temperaturas diferentes  $T_1$  y  $T_2$ . Sea  $T_1 > T_2$ .



Experimentalmente se encuentra que el calor  $\Delta Q$ , que fluye perpendicularmente a las caras es proporcional al área  $A$ , así como a la diferencia de temperaturas ( $T_1 - T_2 = \Delta T$ ) e inversamente proporcional al espesor  $\Delta x$ .

$$\Delta Q \propto A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

En el límite, de una lámina de espesor infinitesimal  $dx$ , a través de la cual hay una diferencia de temperatura  $dT$ , se obtiene la *Ley fundamental de la Ecuación de la Conducción de Calor* o *Ecuación de Fourier* para la conducción, en la que el flujo de calor  $q$  en régimen estacionario queda determinado por:

$$q = -k A \frac{dT}{dx}$$

Donde:

$q$  = velocidad de conducción de calor, kcal/hr,

$A$  = área de la sección transversal perpendicular al flujo calorífico,  $m^2$

$dT/dx$  = gradiente de temperatura,

$k$  = constante de proporcionalidad denominada conductividad calorífica, kcal/(hr m °C)

Conducción en régimen estacionario significa que la velocidad de transferencia de calor  $q$  a través de una sección transversal dada del sistema, no varía con el tiempo.

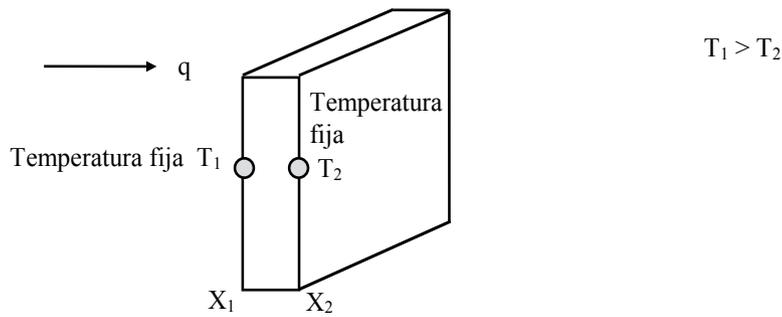
El signo negativo refleja el hecho físico de que el flujo de calor se produce de mayor a menor temperatura, de forma que el signo del gradiente  $dT/dx$  es contrario al flujo de calor (que será positiva cuando  $dT/dx$  sea negativa).

Una sustancia con una gran conductividad calorífica  $k$ , es un buen conductor del calor; en cambio una con una conductividad calorífica  $k$  pequeña es un mal conductor o un buen aislante térmico.

El valor de  $k$  depende de la temperatura, aumentando ligeramente con ésta, pero se puede considerar casi constante si la diferencia de temperaturas no es demasiado grande.

Los metales en su mayoría son mejores conductores de calor ( $k$  elevado) que los no metales y los gases son malos conductores de calor ( $k$  bajo).

Aplicamos la ecuación de Fourier a una lámina de espesor  $\Delta X$  y sección transversal constante  $A$ , en la cual se ha alcanzado un estado estacionario (el flujo de calor no varía con el tiempo).



De la ecuación de Fourier:

$$q = -k A \frac{dT}{dx}$$

Como  $q$ ,  $k$  y  $A$  son constantes, integrando tenemos:

$$q \int_{x_1}^{x_2} dx = -k A \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$q(x_2 - x_1) = -k A(T_2 - T_1) = k A (T_1 - T_2)$$

$$q = k A \frac{(T_1 - T_2)}{(x_2 - x_1)}$$

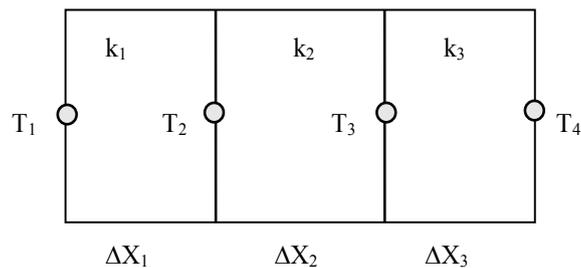
$$q = k A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Que se puede ordenar como:

$$\frac{q}{A} = \frac{\Delta T}{\Delta x/k}$$

### CONDUCCIÓN DE CALOR A TRAVES DE UNA LAMINA DE VARIAS CAPAS

Consideremos una lámina compuesta por tres materiales que tienen diferentes espesores  $\Delta X_1$ ,  $\Delta X_2$  y  $\Delta X_3$  y diferentes conductividades térmicas  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$ .



Si las temperaturas en las superficies exteriores son  $T_1$  y  $T_4$  podemos determinar la rapidez de transferencia de calor en estado estacionario a través de la lámina compuesta.

El flujo de calor es:

$$q = k A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Y podemos escribir:

$$\frac{q}{A} = k_1 \frac{(T_1 - T_2)}{(x_2 - x_1)} = k_2 \frac{(T_2 - T_3)}{(x_3 - x_2)} = k_3 \frac{(T_3 - T_4)}{(x_4 - x_3)}$$

Podemos despejar en cada ecuación, la fuerza impulsora de temperaturas:

$$(T_1 - T_2) = \frac{q}{A} \frac{\Delta x_1}{k_1}$$

$$(T_2 - T_3) = \frac{q}{A} \frac{\Delta x_2}{k_2}$$

$$(T_3 - T_4) = \frac{q}{A} \frac{\Delta x_3}{k_3}$$

La suma de estas ecuaciones da:

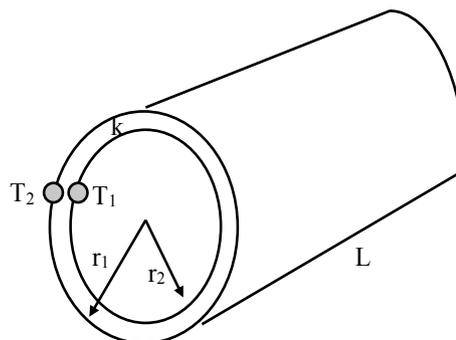
$$(T_1 - T_4) = \frac{q}{A} \left( \frac{\Delta x_1}{k_1} + \frac{\Delta x_2}{k_2} + \frac{\Delta x_3}{k_3} \right)$$

De donde el flujo de calor es:

$$\frac{q}{A} = \frac{(T_1 - T_4)}{\frac{\Delta x_1}{k_1} + \frac{\Delta x_2}{k_2} + \frac{\Delta x_3}{k_3}}$$

## FLUJO DE CALOR A TRAVÉS DE UN CILINDRO HUECO DE UNA ESFERA HUECA

Consideremos un cilindro hueco. Los radios interior y exterior son  $r_1$  y  $r_2$  respectivamente;  $T_1$  y  $T_2$  las temperaturas interior y exterior. Sea  $L$  la longitud del tubo considerado.



Por la ecuación de Fourier:

$$q = -k A \frac{dT}{dx}$$

$$q = -k A \frac{dT}{dr}$$

El área normal al flujo calorífico es:

$$A = 2 \pi r L$$

$$q = -k 2\pi r L \frac{dT}{dr}$$

Al integrar esta ecuación, obtenemos la velocidad de transmisión de calor, en función de las condiciones de contorno:

$$q \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -2\pi k L \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T}$$

$$q \ln \frac{r_2}{r_1} = 2 \pi k L (T_1 - T_2)$$

$$\frac{q}{L} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k}}$$

Para el caso de una esfera hueca, con temperatura  $T_1$  en un radio interior  $r_1$  y una temperatura  $T_2$  en un radio  $r_2$ , tenemos:

$$q = -k A \frac{dT}{dr}$$

El área normal (radial) al flujo calorífico es:  $A = 4 \pi r^2$

$$q = -k 4\pi r^2 \frac{dT}{dr}$$

Separando variables e integrando:

$$q \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r^2} = -4\pi k \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$q \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] = 4 \pi k (T_1 - T_2)$$

$$q = 4 \pi k (T_1 - T_2) \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Si  $k$  varía con la temperatura:

$$k_m = \frac{\int_{T_1}^{T_2} k \, dT}{T_2 - T_1}$$

Admitiendo que  $k$  varía linealmente con la temperatura:

$$k_m = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

## FLUJO DE CALOR POR CONVECCIÓN

El término convección implica la transferencia de calor debida a la transferencia de materia y a la mezcla de elementos macroscópicos de fluido (líquido o gas)

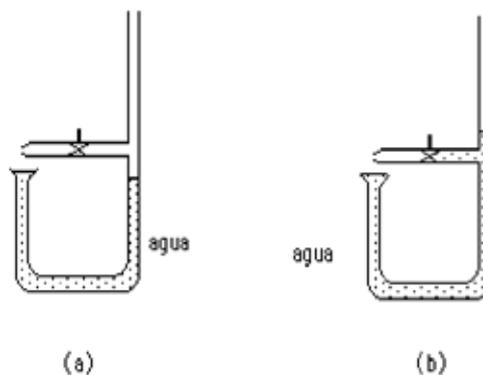
En otras palabras, el término *convección*, se aplica a la propagación del calor de un lugar a otro por un movimiento real de la sustancia caliente.

Si la convección es provocada por diferencia de densidades debidas a diferencia de temperaturas dentro del fluido, recibe el nombre de *convección natural* o *convección libre*.

Sin embargo si el movimiento del fluido es el resultado de una fuerza exterior, una bomba o un ventilador, entonces recibe el nombre de *convección forzada*.

Para comprender mejor la convección libre, consideremos un tubo en "U".

En (a) el agua está a la misma temperatura en ambas ramas del tubo en U, y por consiguiente alcanza el mismo nivel en cada una.



Si calentamos por algún medio la rama de la derecha, el agua se dilata, y por consiguiente, siendo de menor densidad se necesita una columna de mas longitud para equilibrar la presión producida por el agua fría de la columna izquierda.

Al abrir la pequeña llave, el agua pasará de la parte superior de la columna caliente a la fría. Esta aumentará la presión en el fondo de la U del lado del agua fría, y disminuirá la presión del lado del agua caliente, por lo cual en el fondo de la U el agua es forzada a pasar del lado frío al caliente.

Si suministramos continuamente calor al lado caliente y sustraemos calor del lado frío, la circulación se mantiene por sí misma. El resultado en definitiva, es una propagación continua de calor del lado caliente al frío.

La teoría matemática de la *convección* del calor es muy complicada y no existe ninguna ecuación sencilla para la convección, como la hay para la conducción.

Esto es debido al hecho de que el calor ganado o perdido por una superficie a determinada temperatura, en contacto con un fluido a otra temperatura distinta, depende de muchas circunstancias, entre ellas:

1. de que la superficie sea plana o curva,
2. de que sea horizontal o vertical,
3. de que el fluido en contacto directo con la superficie sea un líquido o un gas,
4. de la  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $C_p$  y  $k$  del fluido,
5. de la velocidad del fluido,
6. de si tiene lugar, evaporación, condensación o formación de películas, en la superficie.

La transferencia de calor por convección, puede ser estimada por:

$$q = h A (T_2 - T_1)$$

$q$  = flujo calorífico por convección, Kcal/hr,

$h$  = coeficiente individual de transferencia de calor por convección, kcal/(hr m<sup>2</sup> °C),

$A$  = área de transferencia, m<sup>2</sup>,

$T_2$  = temperatura superior, °C,

$T_1$  = temperatura inferior, °C.

Un caso que se presenta con frecuencia es el de la *convección natural* desde una pared o tubo a temperatura constante, rodeado por aire a la presión atmosférica, con una diferencia de temperaturas  $\Delta T$ .

El coeficiente individual de transferencia de calor por convección  $h$ , ha sido calculado para éste y muchos casos mediante la experimentación. Algunos de estos coeficientes para convección natural en el aire y a la presión atmosférica son:

	$h$ (kcal/hrm <sup>2</sup> °C)
Lámina horizontal, hacia arriba	$2.14(\Delta T)^{1/4}$
Lámina horizontal, hacia abajo	$1.13(\Delta T)^{1/4}$
Lámina vertical	$1.53(\Delta T)^{1/4}$
Tubo horizontal o vertical de diámetro $D$	$3.6(\Delta T/D)^{1/4}$
	$D$ en cm.

## FLUJO DE CALOR POR RADIACIÓN

Todo cuerpo cuya temperatura es superior al cero absoluto emite *energía radiante* en la forma denominada radiación térmica.

En los sistemas a temperatura igual o inferior a la ambiente, la radiación suele ser despreciable. Sin embargo a temperaturas de *calor rojo* ( $\sim 550\text{ }^\circ\text{C}$ ) y superiores, la transmisión por radiación es a menudo el principal mecanismo de transferencia de calor.

Además de la radiación térmica, los cuerpos pueden emitir energía radiante de otras formas. El *bombardeo de una sustancia* mediante electrones produce una radiación que recibe el nombre de *Rayos X*.

Sin embargo, únicamente denominados radiación térmica a la *radiación electromagnética* producida en virtud del emisor. Parte de ésta radiación térmica recibe también el nombre de luz visible.

*La transmisión de calor por radiación es la transferencia de energía por radiación electromagnética, denominada energía radiante.*

Esta energía radiante se encuentra en forma de ondas electromagnéticas que se propagan con la velocidad de la luz y se transmiten a través del vacío lo mismo que a través del aire (en realidad mejor en el aire, puesto que son absorbidas por ésta en cierta proporción).

Estas ondas cuando inciden sobre un cuerpo que no es transparente a ellas, como la superficie de la mano o las paredes de la habitación son absorbidas y su energía es transformada en calor.

El ejemplo más obvio del mecanismo de radiación es el transporte de calor a la tierra desde el sol. La dificultad de transportar calor a una distancia de 150 millones de kilómetros, a través de un vacío casi absoluto, excluye cualquier posibilidad seria de las contribuciones por convección y conducción.

El calor es raramente transferido por un sólo mecanismo, sino que lo normal es una combinación de dos o los tres mecanismos que hemos anotado. Sin embargo en la mayoría de los procesos alguno de los tres mecanismos es el predominante, pudiendo despreciarse los otros mecanismos.

La cantidad de *radiación térmica* emitida por un cuerpo depende de su temperatura y de las características de su superficie.

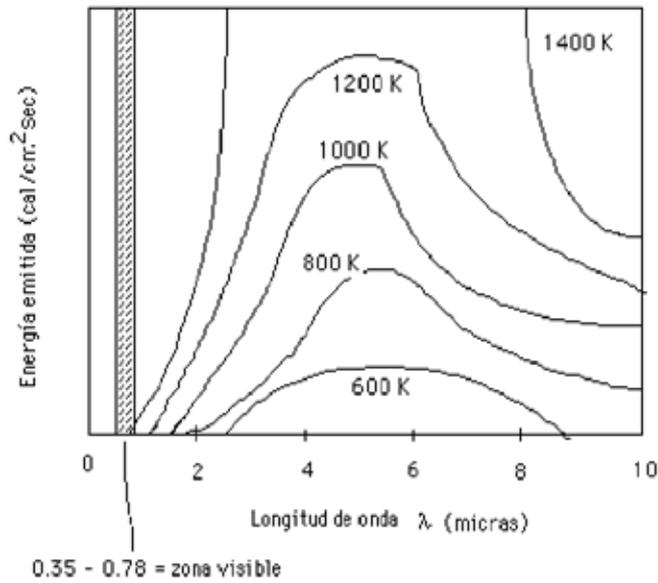
Podríamos esperar que otro objeto a la misma temperatura que el sol ( $5500\text{ }^\circ\text{C}$ ) emitiera una luz igual a la solar. Sin embargo, las condiciones de la superficie afectan también a la emisión por lo que deberían reproducirse a la vez la temperatura y las características de la superficie.

La longitud de onda a la que tiene lugar el máximo poder emisor disminuye al aumentar la temperatura del emisor. El espectro de la luz visible se encuentra en el lado de las bajas longitudes de onda del espectro de radiación térmica. A bajas temperaturas, cuando justamente comienza la emisión de la luz visible (por ej.  $550\text{ }^\circ\text{C}$ ) la luz es roja, y estas ondas se denominan *infrarrojas*.

Al aumentar la temperatura se emite más energía a las longitudes de onda más bajas, y la luz se aproxima más a la blanca o *ultravioleta*.

El sol emite energía a  $5500\text{ }^\circ\text{C}$  por lo que la curva de la distribución espectral está desplazada substancialmente a la izquierda de la curva de  $600\text{ K}$ . En realidad el *espectro solar* se extiende en la denominada zona visible de  $3500$  a  $7800\text{ \AA}$ , lo que es algo más que una coincidencia.

La energía solar que alcanza la superficie terrestre contiene aproximadamente el 5 % de su energía en la zona ultravioleta, el 40 % en la zona visible y el 55 % en la zona infrarroja.



### LEY DE STEFAN BOLTZMANN

Mediante determinaciones experimentales, se demostró que el *poder emisor* total de un cuerpo real es proporcional a la cuarta potencia de la **temperatura absoluta**.

Esta relación, conocida como la Ley de Stefan Boltzmann, es aplicable a la energía radiante total de todas las longitudes de onda emitidas en todas las direcciones y se escribe como:

$$W = \epsilon \sigma T^4$$

donde:

- W = cantidad de energía radiante emitida, Kcal/hr m<sup>2</sup>,
- σ = constante de Stefan Boltzmann y tiene un valor de:  
 $\sigma = 4.878 \times 10^{-8} \text{ Kcal}/(\text{hr m}^2 \text{ K}^4)$
- ε = emisividad total del cuerpo.

La emisividad es baja para las superficies metálicas pulimentadas, y es moderadamente elevada para las superficies metálicas oxidadas. Es elevada para la mayoría de las sustancias no metálicas.

La emisividad tiene un valor comprendido entre 0 y 1.0.

			ε
Aluminio:	pulimentado	25 °C	0.04
	oxidado a 600 °C	200-600 °C	0.11-0.19
Cobre:	pulimentado	115 °C	0.023
	negro por oxidación	25 °C	0.78
Ladrillo rojo		20 °C	0.93

Si un cuerpo pequeño de poder emisivo  $\epsilon$ , está completamente rodeado de paredes a una temperatura  $T$ , la cantidad de energía radiante absorbida por unidad de superficie del cuerpo y por unidad de tiempo es:

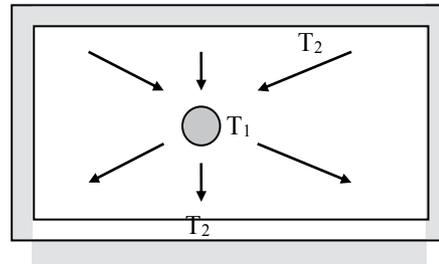
$$W = \epsilon \sigma T^4$$

Por consiguiente, para éste cuerpo a la temperatura  $T_1$ , rodeado de paredes a la temperatura  $T_2$ , la cantidad neta de energía perdida o ganada a causa de la radiación es:

$$W = \epsilon \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

### EL EMISOR IDEAL

Si uno o más cuerpos de pequeño tamaño, no generadores de calor, están contenidos en el interior de una gran recinto, en el que se ha hecho el vacío, alcanzarán eventualmente un estado de equilibrio térmico en el que cada uno RECIBA CALOR RADIANTE a la misma velocidad que lo perderá.



Cada cuerpo *debe emitir* energía radiante al mismo tiempo que la *absorbe*.

Por consiguiente, *un buen receptor* es también un *buen emisor*, y un *mal receptor* es a su vez un *mal emisor*.

La cantidad de energía radiante que choca contra la materia puede ser: *absorbida, transmitida o reflejada*.

Suponiendo que un cuerpo dado, no transmite la energía radiante, éste tiene que absorber o reflejar la energía radiante que llega a él.

Es decir, resulta que un mal receptor deber ser un buen reflector, por consiguiente un *buen reflector es un mal emisor*. Esta es la razón por la que se plantean las paredes de los termos (la plata es muy reflectante y por consiguiente un mal emisor).

La fracción de la energía total que es absorbida se representa con el *coeficiente de absorción* " $\alpha$ "; la fracción transmitida por la *transmisividad* " $\tau$ " y la fracción reflejada por la *reflexividad* " $\rho$ ".

Estas definiciones conducen a:

$$\alpha + \tau + \rho = 1.0$$

Un cuerpo cuyo coeficiente de absorción  $\alpha$ , sea igual a la unidad ( $\alpha = 1$ ) se denomina *cuerpo negro* o radiador ideal. Para un cuerpo negro  $\varepsilon = 1$ .

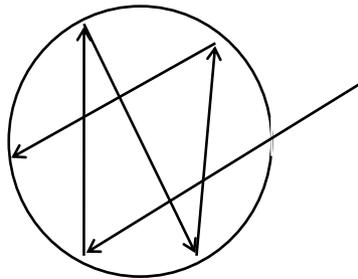
No existe ninguna superficie real que sea una superficie negra ideal, siendo la más aproximada la superficie del negro de humo que solo refleja, aproximadamente el 1% de la energía que recibe:

$$\alpha + \tau + \rho = 1.0$$

$$\rho = 0.01; \quad \tau = 0.0$$

$$\alpha = 0.99$$

Una manera de conseguir condiciones casi perfectas de un cuerpo negro, consiste en absorber o emitir radiación a través de un pequeño orificio practicado en un objeto hueco.



La radiación que penetra por el orificio es probable que sea *reflejada* numerosas veces antes de reflejarse al exterior por el mismo lugar por donde entro. De la parte reflejada, solo una pequeña fracción escapa a través de la abertura, siendo el resto absorbido por las paredes. Por consiguiente *la abertura* se comporta como *el equivalente* a una superficie de la misma área con un coeficiente de absorción igual a 1 ( $\alpha=1$ ), *receptor ideal*.

De forma semejante, la energía radiante emitida por las paredes y que escapa a través de la abertura (si las paredes se encuentran a temperatura uniforme) será de la misma naturaleza que la emitida por un cuerpo negro o emisor ideal. (pirómetro óptico).

## CAPITULO VIII

### PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA

#### TRABAJO EXTERIOR

Cuando se eleva la temperatura de un cuerpo tienen lugar fenómenos muy distintos; generalmente los gases, líquidos y sólidos se dilatan (aunque algunos pueden contraerse); los pares termoeléctricos desarrollan una fuerza electromotriz; los conductores experimentan una variación en su resistencia, etc.

En tales procesos hay una transmisión de calor y también la aplicación de una fuerza que efectúa un *desplazamiento*, y por consiguiente realiza un trabajo.

El estudio de éstos fenómenos y el de los cambios de energía que tienen lugar en la transmisión de calor y realización de trabajo constituyen el objeto de la termodinámica.

*El estudio de los cambios energéticos involucrados en la realización del trabajo y en el flujo del calor, es la temática de la termodinámica.*

La termodinámica considera *un sistema* perfectamente definido (por ejemplo un gas contenido en un cilindro) el cual es obligado a actuar directamente sobre el medio exterior y a realizar una misión útil. *No se ocupa* de los procesos internos que no afectan al exterior del *sistema* y que no puedan ser utilizados o medidos.

Si un sistema en conjunto, ejerce una fuerza sobre el medio que lo rodea y tiene lugar un desplazamiento, se ha realizado un trabajo por el sistema o sobre el sistema que se denomina *trabajo externo*. Así un gas encerrado en un cilindro y sometido a una presión constante, realiza un trabajo externo sobre el medio exterior cuando al dilatarse, comunica un movimiento al pistón.

El trabajo que realiza una parte del sistema sobre otra parte del mismo, se denomina *trabajo interno*. Por ejemplo la acción mutua entre moléculas o entre electrones de un sistema origina un trabajo *interno*. La termodinámica no se ocupa del trabajo interno.

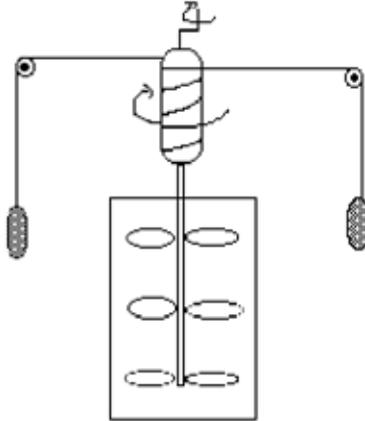
#### EL EQUIVALENTE MECÁNICO DEL CALOR

Ya hemos visto que la *lbf-ft*, fue desarrollada como una unidad de trabajo y la BTU como una unidad de calor. Sabemos que el calor y el trabajo eran interpretados como conceptos separados, a mediados del siglo XIX, la conexión entre calor y trabajo fue establecida firmemente, en la forma del *principio de la conservación de la energía*.

Tal principio afirma que el calor y el trabajo son formas de energía y que debe existir una relación definida entre ellas, llamada *el equivalente mecánico del calor*.

Fue Joule, quien determinó por primera vez en forma experimental cuantas *lbf-ft* de trabajo equivalían a una BTU de calor.

Joule utilizó un dispositivo en el que la caída de unos cuerpos hacía girar un conjunto de aspas en el interior de un recipiente aislado que contenía agua, al agitar el agua del recipiente, se elevaba su temperatura.



En un ciclo de operación, la caída de los pesos, contribuye una cantidad conocida de trabajo efectuado sobre el agua, cuya masa es  $m$ , provocando un aumento  $\Delta T$  en su temperatura:

$$Q = m c_p \Delta T$$

Por lo tanto, midiendo  $W$  y  $\Delta T$ , se calcula  $Q$ ; el resultado es:

$$1 \text{ BTU } (=252 \text{ cal}) = 777.9 \text{ lbf-ft}$$

Es decir, 777.9 lbf-ft de trabajo mecánico generan, al convertirse completamente en energía calorífica, 1 BTU, es decir elevará la temperatura de 1 libra de agua de 63 a 64 °F. Esta relación puede escribirse:

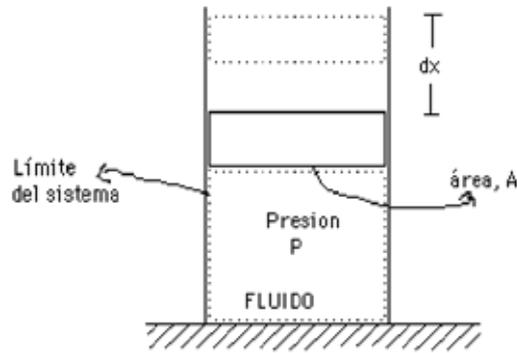
$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ joules}$$

En la práctica, la caloría no tiene mucho uso ni es muy necesaria. Sin embargo hay que conocerla, ya que está muy arraigada en la literatura científica, y se ha definido una nueva caloría, llamada *caloría termoquímica*.

$$1 \text{ cal(termoquímica)} = 4.184 \text{ joules(exactamente)}$$

## TRABAJO ORIGINADO EN LOS CAMBIOS DE VOLUMEN

Consideremos un fluido, encerrado en un cilindro provisto de pistón móvil, sobre el cual pueden actuar el sistema y el medio exterior:



Sea  $A$  la sección transversal del cilindro y  $P$  la presión ejercida por el sistema en la cara del pistón.

La fuerza sobre el pistón es por lo tanto:  $F = P A$ ; si el pistón se mueve hacia afuera, una distancia infinitesimal  $dx$ , el sistema realiza una cantidad de trabajo muy pequeña:

$$dW = F dx$$

$$dW = P A dx$$

Pero:

$$A dx = dV$$

Siendo  $dV$  la variación del volumen del gas:

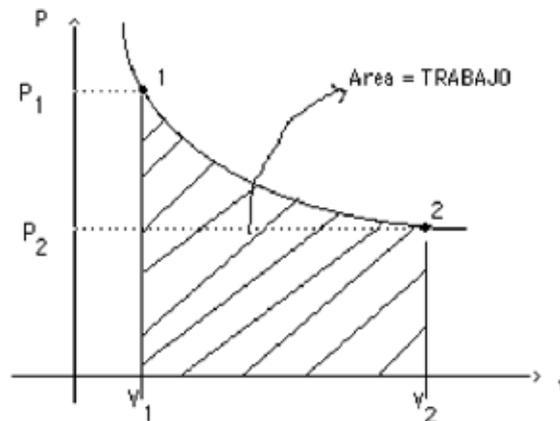
$$dW = P dV$$

En general, *la presión* no será constante durante dicho desplazamiento.

Para obtener el trabajo total  $W$  que el gas efectúa sobre el pistón en un desplazamiento grande (por ejemplo de  $V_1$  a  $V_2$ ) debemos conocer como varía  $P$  durante dicho desplazamiento:

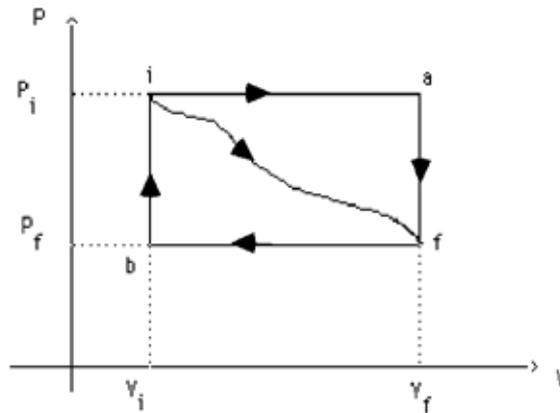
$$W = \int P dV$$

Esta integral puede ser evaluada gráficamente, como el área bajo la curva de un diagrama  $P$ - $V$ .



Es convenio adoptado que el trabajo realizado *por el sistema* sea *positivo*, mientras que el realizado *sobre el sistema* es *negativo*.

Hay muchas maneras diferentes de llevar el sistema desde su estado inicial  $i$  hasta su estado final  $f$ .



Por ejemplo la presión puede mantenerse constante desde  $i$  hasta  $a$  y después hacer que el volumen permanezca constante desde  $a$  hasta  $f$ . Entonces el trabajo efectuado al dilatarse el gas es igual al área bajo la recta  $ia$ .

Otra trayectoria posible es la  $ibf$ , en la cual el trabajo efectuado por el gas es el área bajo la recta  $bf$ .

La curva continua desde  $i$  hasta  $f$  es otra trayectoria posible en la que el trabajo efectuado por el gas difiere en las dos trayectorias anteriores.

Por lo tanto resulta que:

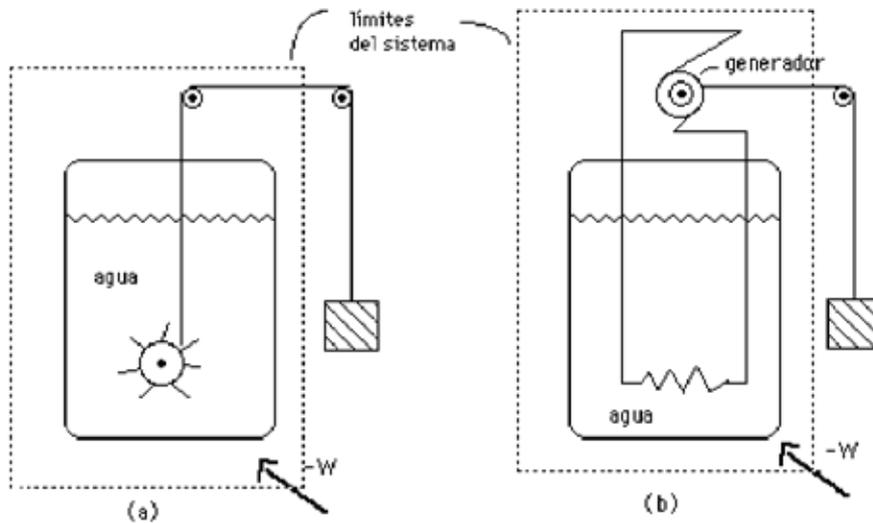
*El trabajo efectuado por el sistema no sólo depende de sus estados inicial y final, sino también de los estados intermedios, es decir de la trayectoria del proceso.*

( $dW$  no es función de estado del sistema, es una diferencial inexacta).

## EL CALOR Y EL TRABAJO

Hemos visto como puede ser obligada una sustancia a pasar de un estado inicial a otro final por cualquier número de transformaciones, todas las cuales implican la realización de trabajo.

Sin embargo hay otros medios de modificar el sistema; consideremos los siguientes casos:

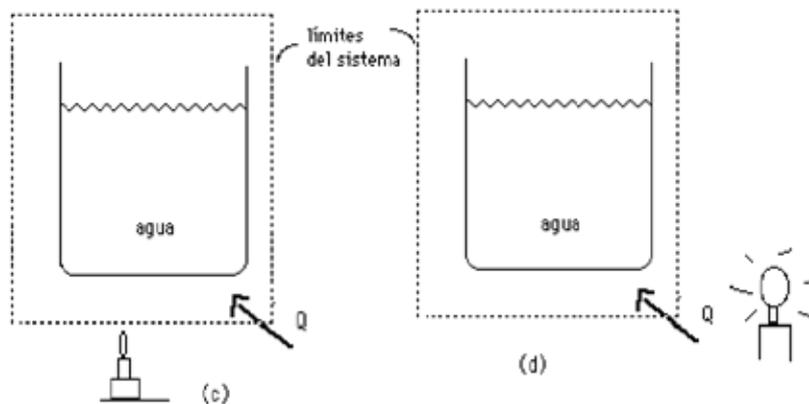


En la figura (a) el sistema está compuesto de agua y una rueda de paletas que es obligada a girar y agitar el agua por la acción de un peso que cae.

En (b) el sistema está formado por agua y una resistencia eléctrica introducida en ella. La corriente eléctrica que pasa por la resistencia es producida por un generador accionado por un peso que cae.

En ambos casos se modifica el estado del sistema y puesto que el agente que provoca el cambio es un peso que desciende "ambos procesos implican la realización de trabajo".

Consideremos otros dos casos:



En estos dos casos, la situación es completamente distinta a los dos anteriores. El sistema en estos dos casos es el agua contenida en el recipiente.

En (c), el sistema está en contacto con un mechero, es decir con otro cuerpo a temperatura más elevada; mientras que en (d) el sistema está próximo pero no en contacto directo con una lámpara eléctrica cuya temperatura es mucho más elevada que la del agua.

En ambos casos, el estado se modifica, pero en ninguno el cambio se debe a un agente mecánico; en éstos casos el cambio del sistema se debe a una transmisión de calor.

La forma de seleccionar a un sistema en los problemas de la termodinámica es arbitraria. Es muy importante definir con claridad, cual es *el sistema* y cual es *el medio ambiente* o *medio exterior*.

En la figura (b) por ejemplo: si se considera como sistema el agua y su recipiente, y la resistencia como el medio ambiente, hay una transmisión de calor en virtud de la diferencia de temperaturas entre la resistencia y el agua, pero sobre el límite del sistema no existe una fuerza que provoque un desplazamiento y en consecuencia el trabajo es nulo.

Si escogemos al sistema como el formado por el generador, el circuito eléctrico, el agua y su recipiente, el medio ambiente entonces, queda constituido por el peso. En este caso el medio ambiente (por medio de la cuerda) realiza un trabajo sobre el sistema, pero no existe diferencia de temperatura entre el sistema y su medio ambiente y en consecuencia el flujo de calor es nulo.

Este ejemplo indica que primero debe definirse con claridad lo que ha de ser el sistema y su medio ambiente antes de decidir si el cambio en el estado del sistema se debe a un flujo de calor, a la realización de trabajo o a ambos.

Sólo habrá transferencia de calor entre el sistema y su medio ambiente cuando exista una diferencia de temperaturas a través de los límites del sistema; si no existe diferencia de temperaturas, la transferencia de energía implica la realización de trabajo.

Al igual que el trabajo, el calor que fluye digamos hacia el sistema depende de la manera en que dicho sistema se calienta (por ejemplo a  $P$  constante hasta  $T_1$  y luego a  $T_2$  hasta  $P_2$ , etc.)

*El calor que pierda o gane el sistema no sólo depende de los estados inicial y final, sino también de los estados intermedios, es decir de la trayectoria del proceso.*

Tanto el calor como el trabajo, dependen de la trayectoria que se siga, ninguno de ellos es independiente de la trayectoria.

Es convenio adoptado, que el calor realizado por el sistema es negativo y el calor cedido sobre el sistema es positivo.

## LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA

Ahora es posible aunar todas estas ideas. Supongamos que un sistema cambia desde un estado inicial  $i$  hasta un estado de equilibrio final  $f$  de una manera definida, y llamemos  $Q$  al calor *absorbido* por dicho sistema y  $W$  al trabajo *efectuado* por él. A continuación calculamos el valor  $Q - W$ . Después efectuamos un cambio del sistema desde *el mismo estado  $i$  hasta el mismo estado  $f$* , pero ahora por una trayectoria diferente. Repetimos el proceso una y otra vez recorriendo en cada caso una trayectoria distinta y en todas ellas resulta que la cantidad  $Q - W$  *es la misma*.

Es decir, aún cuando  $Q$  y  $W$  dependan por separado de la trayectoria seguida, su diferencia  $Q - W$  no depende para nada de la manera en que el sistema pasa desde el estado  $i$  hasta el estado  $f$ , sino sólo depende de los estados (de equilibrio) inicial y final.

Ahora bien,  $Q$  es la energía añadida al sistema por la transferencia de calor y  $W$  es la energía suministrada por el sistema cuando realiza trabajo, de tal manera que  $Q - W$  representa por definición *al cambio de energía interna* del sistema. Representaremos a la función energía interna por la letra  $U$ .

La energía interna  $U_f$  del sistema en su estado final, menos la energía interna  $U_i$  del sistema en el estado inicial, es sencillamente el cambio en la energía interna del sistema, y ésta cantidad tiene un valor definido independiente de como pasó el sistema del estado  $i$  al estado  $f$ .

$$U_f - U_i = \Delta U$$

$$\Delta U = Q - W$$

Expresión que se conoce como la *Primera ley de la termodinámica*.

Al aplicar ésta ecuación debemos recordar que:

- Q se considera positiva cuando *entra* calor al sistema,
- W es positiva cuando el sistema *efectúa* trabajo,
- Q y W han de expresarse en las mismas unidades.

Si el sistema sólo sufre un cambio infinitesimal en su estado:

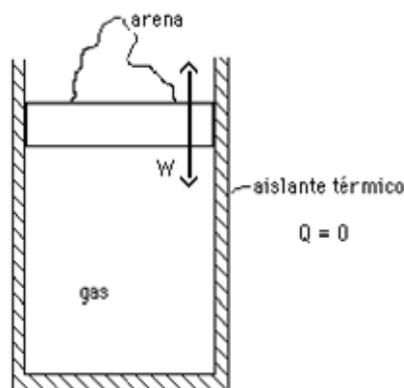
$$dU = dQ - dW$$

La Primera Ley puede expresarse así: “Todo sistema termodinámico en un estado de equilibrio posee una variable de estado, llamada energía interna U, cuyo cambio dU en un proceso diferencial queda determinado por  $dU = dQ - dW$ ”.

La Primera Ley de la Termodinámica se aplica a todo proceso de la naturaleza que comienza en un estado de equilibrio y termina en otro, aún cuando el proceso pueda o no incluir estados de equilibrio.

## PROCESO ADIABATICO

Consideremos un gas contenido en un cilindro como el *sistema*; el cilindro está construido con un material aislante al calor. El calor no puede entrar del medio ambiente y viceversa.



Un pistón hermético sin fricción se carga con arena; de tal manera que cuando se añada o quite arena el gas pueda comprimirse o expandirse contra el pistón, obteniéndose un trabajo que cruza la frontera.

Un proceso, en el cuál *no fluye calor*, ni hacia dentro ni hacia afuera del sistema se denomina *proceso adiabático*.

En un proceso adiabático  $Q = 0$ , de modo que de la Primera Ley, tenemos:

$$\Delta U = U_f - U_i = Q - W$$

Proceso adiabático,  $Q = 0$ :

$$\Delta U = U_f - U_i = -W$$

Por lo tanto, durante un proceso adiabático la energía interna de un sistema, aumenta exactamente en la cantidad de trabajo efectuado sobre él.

Si en un proceso adiabático el sistema efectúa trabajo, *su energía interna disminuye*.

Cualquier aumento de energía interna casi siempre da lugar a un aumento de la temperatura del sistema; por lo contrario, una disminución de la energía interna casi siempre hace que la temperatura del sistema disminuya.

Ejemplos de procesos adiabáticos en ingeniería son: la dilatación del vapor en el cilindro de las máquinas de vapor, la dilatación de los gases calientes en una máquina de combustión interna y la compresión del aire en una máquina diesel o en un compresor de aire.

## PROCESO ISOCORO

Se dice que un proceso es *isocoro* cuando el sistema que lo experimenta *no cambia su volumen*.

Dado que no hay variación de volumen, no se ha realizado ningún trabajo,  $W=0$  y por la Primera Ley:

$$\Delta U = Q - W \quad \text{proceso isocoro} \quad V = \text{constante}$$

$$Q = U_f - U_i$$

Es decir, todo el calor que se suministra *al sistema* se ha utilizado para aumentar su energía interna. Ej: la combustión del vapor de gasolina y aire en un motor de explosión, implica un aumento extraordinariamente rápido de la temperatura y la presión a volumen aproximadamente constante.

## PROCESO ISOCORICO

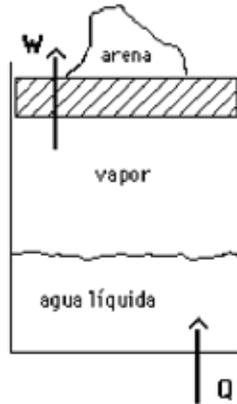
Consideremos un otro caso especial, en el que *la presión permanece constante*, en tanto que el volumen cambia en una cantidad finita, por ejemplo desde  $V_i$  a  $V_f$  se tiene:

$$W = \int P \, dv = P \int dV; \quad \text{a } P \text{ constante}$$

$$W = P (V_f - V_i)$$

Un proceso que ocurre a presión constante se denomina *proceso isobárico*. Por ejemplo, cuando se calienta el agua en la caldera de una máquina de vapor hasta llevarla a su punto de ebullición, convirtiéndola en vapor, que después se sobrecalienta, se efectúan procesos a presión constante.

Consideremos un proceso isobárico. El sistema es agua en un recipiente cilíndrico. Un pistón hermético sin fricción se carga con arena para producir y mantener la presión deseada en el agua.



Al sistema se transfiere calor. Supongamos que el agua hierve y parte de ella se convierte en vapor.

El sistema puede dilatarse, muy lentamente, pero la presión que ejerce sobre el pistón es siempre la misma. Si el pistón se sujeta, de tal manera que no se mueva, o si le añadimos o le quitamos algo de arena durante el proceso de calentamiento, dicho proceso no sería isobárico.

Consideremos el proceso de la ebullición. La sustancia cambia su fase de líquida a vapor al presentarse una combinación definida de presión y temperatura. Por ejemplo a 100 °C el agua hierve si la presión es de 1 atm.

Consideremos el cambio de fase de líquido a vapor de una masa  $m$ , que ocurre a temperatura y presión constantes. Sea  $V_l$  el volumen del líquido y  $V_v$  el volumen del vapor.

El trabajo efectuado por ésta sustancia al dilatarse desde  $V_l$  hasta  $V_v$  a presión constante es:

$$W = P (V_v - V_l) ; \quad P = \text{constante}$$

Llamemos  $\lambda$  al calor de vaporización, es decir al calor necesario para que una masa unitaria pase de líquido a vapor a temperatura y presión constantes.

Entonces el calor absorbido por la masa  $m$  durante el cambio de estado es:

$$Q = m \lambda$$

De la Primera Ley de la Termodinámica, tenemos:

$$\Delta U = Q - W$$

de manera que:

$$\Delta U = m \lambda - P(V_v - V_l)$$

$$P = \text{Cte.}$$

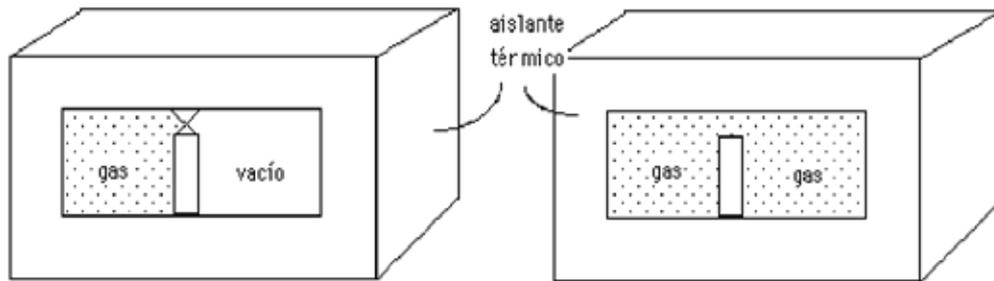
Para éste proceso isobárico.

Cuando en un determinado proceso, *la temperatura* se mantiene constante, el proceso se denomina **proceso isotérmico**.

Un gas contenido en un cilindro, que es comprimido mediante un pistón, del gas se va quitando calor mediante algún sistema de modo que la temperatura del gas es mantenida constante.

Un proceso de gran interés teórico es el de la *dilatación libre*.

Consiste en un proceso adiabático en el cual no se efectúa trabajo ni sobre el sistema, ni por él.



Si de pronto se abre la llave, el gas se precipita en el vacío y se dilata libremente. A causa del aislamiento térmico, éste proceso es adiabático, y como las paredes de los recipientes son rígidas, el sistema no efectúa ninguna trabajo.

De la Primera Ley:

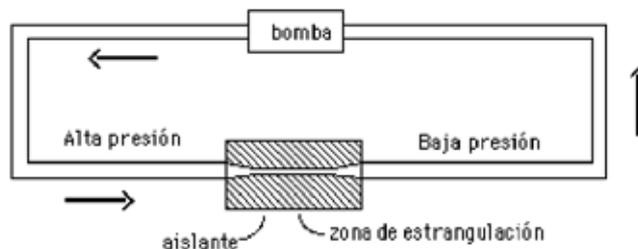
$$\Delta U = Q - W$$

$$U_f = U_i$$

En la dilatación libre, las energías internas inicial y final son iguales.

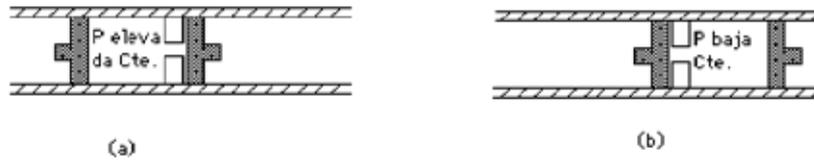
## FENOMENO DE LA ESTRANGULACIÓN

Un fenómeno de estrangulación, es aquel en el cual un fluido que está inicialmente a una presión elevada y constante pasa a través de una pequeña abertura (un orificio) a una región de presión inferior constante, sin que tenga lugar un intercambio de calor.



Un fluido sale de un compresor a presión elevada, pasando después, a través de una válvula de estrangulación, a un tubo que lo conduce al depósito de admisión, a baja presión del compresor.

Consideremos un elemento del fluido encerrado, entre el pistón y la válvula de estrangulación, el cuál es obligado a moverse hacia la derecha.



En (a) la presión conserva un valor constante elevado y en (b) la presión tiene un valor constante mas bajo.

Sea:

- $P_1$  = presión elevada,
- $P_2$  = presión baja,
- $V_1$  = volumen de la masa de fluido a la presión elevada,
- $V_2$  = volumen de la masa de fluido a la presión baja.

El fluido a alta presión pasa del volumen  $V_1$  al volumen cero a la presión constante  $P_1$ , el trabajo realizado sobre el fluido es:

$$P_1 (0 - V_1)$$

El fluido a baja presión, pasa del volumen cero al volumen  $V_2$  a la presión constante  $P_2$ , el trabajo realizado por el fluido es:

$$P_2 (V_2 - 0)$$

El *trabajo neto* es:

$$W = P_2 V_2 - P_1 V_1$$

Como el proceso es adiabático, de la Primera Ley tenemos:

$$U_2 - U_1 = Q - W = P_1 V_1 - P_2 V_2$$

$$U_1 + P_1 V_1 = U_2 + P_2 V_2$$

Los valores de la suma  $U + PV$ , se denomina *entalpía*.

$$h = U + PV$$

$$h_1 = h_2$$

$$U_1 + P_1 V_1 = U_2 + P_2 V_2$$

Este resultado (la estrangulación) es de gran importancia en las técnicas que manejan vapor y en la técnica de la refrigeración. Los valores de entalpía, están dados en tablas para el vapor de agua y para muchas sustancias refrigerantes.

## CAPITULO IX

### TEORIA CINETICA DE LOS GASES

El estudio de las *propiedades de los gases* se puede realizar desde distintos puntos de vista y a diferentes niveles.

En primer lugar está el *punto de vista clásico*; consiste en aplicar las Leyes de Newton a las partículas que constituyen el gas y que reciben el nombre de "moléculas". Aplicar las leyes de la mecánica individualmente por ejemplo a cada átomo de un gas, es algo que una computadora dará cálculos muy voluminosos. ( $10^{23}$  moléculas, Número de Avogadro).

Luego está el *punto de vista experimental*; en laboratorio se llega a ciertas leyes y se dice que éste conjunto de leyes gobiernan las propiedades de los gases, relaciones que se denominan con el nombre de *Teoría Cinética*.

La *Teoría Cinética* trata de explicar las propiedades de los gases a partir de un *modelo teórico* de lo que es un gas.

En la misma línea, pero a otro nivel, la *Mecánica Estadística*, construye a partir de principios generales y dentro de una estructura matemática rigurosa, un modelo más versátil, que se aplica a gases como a sólidos, en teoría clásica como en teoría cuántica (Gibbs y Boltzmann).

Todo modelo es una simplificación y esquematización de la realidad. Los creadores de la *Teoría Cinética* concibieron un modelo de gas con las siguientes características:

- a) *Las moléculas* que constituyen el gas son muy pequeñas y su número en un volumen macroscópico es extremadamente grande; sin embargo el volumen efectivo de las moléculas es despreciable frente al volumen del recipiente.
- b) Las moléculas pueden ser formadas por un sólo átomo (monoatómicas), por dos (diatómicas) o por varios (poliatómicas).
- c) *El movimiento de las moléculas* es desordenado y es gobernado por las leyes clásicas.
- d) *La densidad* de las moléculas es tan baja que no existen fuerzas apreciables entre moléculas. Luego la única interacción son los choques contra las paredes del recipiente.
- e) *Los choques* son totalmente elásticos, con la consiguiente conservación del movimiento y de la energía.

Estas hipótesis definen el *gas ideal o gas perfecto*, aproximación de varios gases reales en condiciones normales.

En este capítulo sólo aplicaremos la *teoría cinética a los gases*, porque las interacciones entre sus átomos son mucho más débiles que en los líquidos y en los sólidos, lo que implica las dificultades matemáticas.

La masa del gas es igual al número de moles por el peso molecular ( $m = nM$ ), con lo que la densidad del gas será igual a  $\rho = (nM)/V$ , donde  $V$  es el volumen total del gas.

## LEY DE BOYLE

Experimentalmente se encuentra que, a densidades bastantes pequeñas, todos los gases tienden a mostrar una cierta relación sencilla entre las variables termodinámicas P, V y T. Esto sugiere el concepto de *un gas ideal*, es decir de uno que tuviese el mismo comportamiento sencillo en todas las condiciones de P y T.

Robert Boyle, encontró que si se mantiene constante la temperatura de una masa determinada de gas, mientras su volumen varía entre amplios límites, la presión ejercida por el vas varía también de tal modo que el producto de la P por el V permanece muy aproximadamente constante, es decir:

$$PV = \text{constante}$$

(T Cte, y masa Cte).

Relación que constituye la *Ley de Boyle*. Referidos a dos estados diferentes, podemos escribir:

$$P_1V_1 = P_2V_2 = \text{constante}$$

T = constante

Donde los estados 1 y 2 deben estar a la misma temperatura.

Es decir un gas ideal es aquel que obedezca exactamente la Ley de Boyle a todas las presiones.

## LEY DE GAY LUSSAC

El primer enunciado preciso de la ley que relaciona las variaciones de volumen de un gas con las variaciones de su temperatura fue publicado por Gay Lussac.

Al parecer fue el primero en reconocer que al efectuar medidas en los gases es esencial mantener la presión constante. Si no se hace esto, las variaciones de volumen originados por los cambios de presión, no permiten conocer las variaciones de volumen debidas sólo a los cambios de temperatura.

$$\frac{V}{T} = \text{constante}$$

(P = Cte)

Ley de Charles Gay Lussac

Esa magnitud medida, la variación del volumen con la temperatura a presión constante, era el *coeficiente de dilatación cubica*, a presión constante:

$$V = V_0 [1 + \beta (T - T_0)]$$

P constante

Siendo  $V_0$  el volumen a una temperatura de referencia  $T_0$  y V el volumen a la temperatura T.  $\beta$  es el coeficiente de dilatación cubica ( $1/^\circ\text{C}$ ). Si se toma, como es normal, la temperatura de referencia la de  $0^\circ\text{C}$ :

$$V = V_0 [1 + \beta_0 T]$$

- 1) El *volumen es función lineal de la temperatura*,
- 2) El coeficiente de dilatación  $\beta_0$  tiene muy aproximadamente *el mismo valor para todos los gases*.  $\beta_0 = 1/273.15 [=] 1/^\circ\text{C}$ .

Cuanto más baja es la presión, los valores de  $\beta_0$  coinciden con mayor aproximación para los distintos gases.

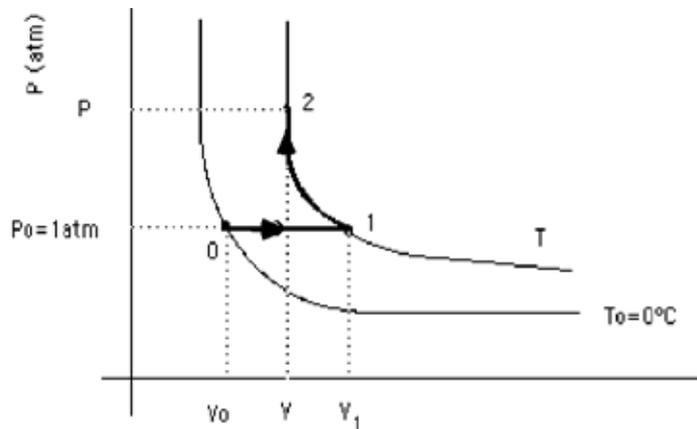
Ahora podemos ampliar la definición de *gas ideal*, el cuál *debe obedecer* la Ley de Boyle a todas las presiones y además debe cumplir la Ley de Gay Lussac con un coeficiente de dilatación cubica igual a  $1/273.15$  ( $1/^\circ\text{C}$ ).

### ECUACIÓN DE ESTADO DE UN GAS IDEAL

Al combinar las leyes de Boyle y Gay Lussac (Charles-Gay Lussac); podemos obtener una sola ecuación que relacione la P, el V y la T de un gas ideal.

Consideremos un diagrama P-V.

Inicialmente supongamos que el gas se encuentra a 1 atm de presión y  $0^\circ\text{C}$  de temperatura (punto 0). El gas se expande luego a presión constante hasta un volumen  $V_1$  a una temperatura T (punto 1). Después este gas se comprime isotérmicamente hasta un volumen V y una presión P (punto 2).



Como los puntos 0 y 1 están a la misma presión, se deduce de la Ley de Gay Lussac:

$$V_1 = V_0 [1 + \beta_0 T]$$

Al estar los puntos 1 y 2 a la misma temperatura, la Ley de Boyle da:

$$P V = P_0 V_1$$

Reemplazando  $V_1$ :

$$P V = P_0 V_0 (1 + \beta_0 T)$$

Que puede escribirse:

$$P V = P_0 V_0 \beta_0 (T + 1/\beta_0)$$

Para un gas ideal:

$$1/\beta_0 = 273.15^\circ\text{C}$$

El término entre paréntesis, representa la temperatura Kelvin:

$$T_K = 273.15 + T$$

$$P V = P_0 V_0 \beta_0 T$$

T en Kelvin,

Como  $P_0 = 1 \text{ atm}$ ,  $T_0 = 0^\circ\text{C}$ ,  $V_0$  es el volumen ocupado por el gas en condiciones normales. En condiciones normales, un molgramo de cualquier gas ocupa aproximadamente 22.415 litros.

Si la masa del gas comprende  $n$  molgramo, su volumen será:

$$V_0 = n \times 22.415 \text{ litros}$$

$$\begin{aligned} P_0 V_0 \beta_0 &= 1 \text{ atm} \times n \times 22.415 \text{ lts} \times 1/(273.15 \text{ }^\circ\text{C}) \\ &= 0.08206 \times n \text{ (atm-lt)/}^\circ\text{C} \\ &= n \times 0.08206 \text{ atm-lt/}^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Este coeficiente  $0.08206 \text{ atm-lt/}^\circ\text{C}$  es igual para todos los gases, y se representa por la letra  $R$ , conocida como la *constante universal de los gases*, que en diferentes unidades tiene el valor de:

$$\begin{aligned} R &= 0.08206 \text{ atm-lt/(molgr }^\circ\text{C)} \\ R &= 1.987 \text{ cal/(molgr }^\circ\text{C)} = 1.987 \text{ BTU/(mollb }^\circ\text{F)} \\ R &= 8.314 \text{ Joules/(molgr K)} \end{aligned}$$

Con lo que la expresión:

$$PV = P_0 V_0 \beta_0 T$$

como:

$$P_0 V_0 \beta_0 = n R$$

$$P V = n R T$$

Conocida como la *ecuación de estado de un gas ideal*.

Puede obtenerse una forma más conocida de la ecuación del gas ideal, escribiendo:

$$\frac{P V}{T} = n R$$

Si a una masa de gas se la hace experimentar un cambio cualquiera, el segundo miembro permanece constante. Si nos referimos a dos estados cualesquiera:

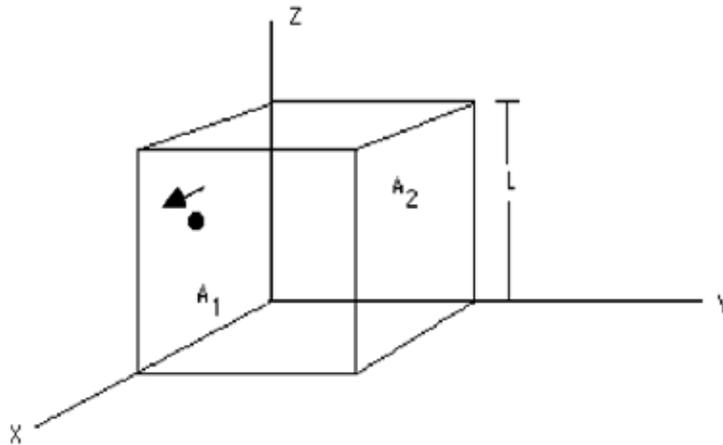
$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

$$\frac{P V}{T} = \text{constante}$$

## CALCULO CINETICO DE UN GAS IDEAL

Calcularemos ahora la presión de un gas ideal a partir de la *Teoría Cinética*. Es decir, una relación entre la presión del gas en un recipiente y la energía cinética de las moléculas del gas ideal.

Por sencillez consideremos un recipiente cúbico de arista  $L$ .



Una molécula de masa  $m$  tiene una velocidad  $\mathbf{v} = (iv_x + jv_y + kv_z)$ . Si ésta partícula choca con  $A_1$ , rebotará invirtiendo su componente  $x$  de la velocidad, de modo que el cambio en el ímpetu (fuerza, violencia) de la partícula será:

$$\begin{aligned} \text{Ímpetu final} - \text{Ímpetu inicial} &= -mv_x - (mv_x) \\ &= -2mv_x \end{aligned}$$

Perpendicular a  $A_1$ . Por lo tanto el ímpetu impartido a  $A_1$  será  $2mv_x$ , ya que el ímpetu total se conserva, por tratarse de *un choque elástico*.

Supongamos que ésta partícula alcanza  $A_2$  sin que en su trayectoria choque con ninguna otra partícula.

El *tiempo* requerido para atravesar el cubo será:  $L/v_x$ . En  $A_2$  invertirá de nuevo la componente  $x$  de su velocidad y regresará a  $A_1$ . Suponiendo que no hayan colisiones intermedias, el viaje de *ida y vuelta* durará un tiempo  $2L/v_x$ , así que el *número de choques* por unidad de tiempo, que la partícula puede efectuar con  $A_1$ , es  $v_x/2L$ , de manera que el ritmo con el que se transfiere ímpetu a  $A_1$  es:

$$\text{Ímpetu} * \text{numero de colisiones} = 2m v_x * \frac{v_x}{2L} = \frac{m v_x^2}{L}$$

Para obtener la fuerza total sobre  $A_1$ , debemos sumar  $\frac{m v_x^2}{L}$  para todas las partículas:

$$\text{Presión} = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Área}}$$

Área =  $L^2$ ;

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{m v_{xi}^2}{L} \right)}{L^2} \qquad P = \frac{\sum_{i=1}^n (m v_{xi}^2)}{L^3}$$

$$P = \frac{m \sum_{i=1}^n (v_{xi}^2)}{L^3}$$

De donde, la presión es:

$$P = \frac{m [v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots v_{xn}^2]}{L^3}$$

Si  $N$  es el número total de partículas del recipiente:

$$N = n_v L^3$$

Donde  $n_v$  es el número de moléculas por unidad de volumen:

$$L^3 = \frac{N}{n_v}$$

$$P = m n_v \frac{[v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots v_{xn}^2]}{N}$$

Pero  $m n_v$  es la masa por unidad de volumen, es decir la densidad  $\rho$ .

La cantidad en paréntesis es el valor promedio de  $v_x^2$  para todas las partículas del recipiente, entonces:

$$P = \rho v_x^2$$

Para todas las partículas  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ , debido al elevado número de moléculas, los valores promedio de  $v_x^2$ ,  $v_y^2$ ,  $v_z^2$  serán iguales y el valor:

$$v_x = v_y = v_z = v/3$$

Por lo tanto:

$$v_x = v/3$$

Y la presión que ejerce el gas será:

$$P = \rho v_x^2 = 1/3 \rho v^2$$

Aunque éste resultado se ha obtenido ignorando las colisiones entre las partículas, es verdadero aún cuando consideremos a dichas colisiones. De igual manera, hubiésemos podido escoger un recipiente de cualquier forma, el escoger un cúbico fue simplemente para simplificar el cálculo.

Por el principio de Pascal, la presión es la misma en todos los lados y en cualquier parte de su interior (se ha ignorado el peso del gas).

La raíz cuadrada de  $v^2$  se llama **rapidez cuadrática media** de las moléculas y es una especie de *velocidad molecular promedio*:

$$v_{rcm} = \sqrt{v^2}$$

$$\begin{array}{ll} \rho = nM/V & ; \quad PV = nRT \\ P = 1/3 \rho v^2 & ; \quad v^2 = 3P/\rho \\ v^2 = 3P/(nM/V) & ; \quad v^2 = 3PV/(nM) \\ v^2 = 3nRT/(nM) & \end{array}$$

$$v_{rcm} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Con valores normales de presión (1 atm) y de densidad del aire ( $1.293 \text{ kg/m}^3$ ) da  $v_{\text{rcm}} = 485 \text{ m/sec}$  que se acerca a la velocidad del sonido.

## CALORES ESPECÍFICOS DE UN GAS IDEAL

La energía interna  $U$  de un gas ideal:

$$U \propto nRT$$

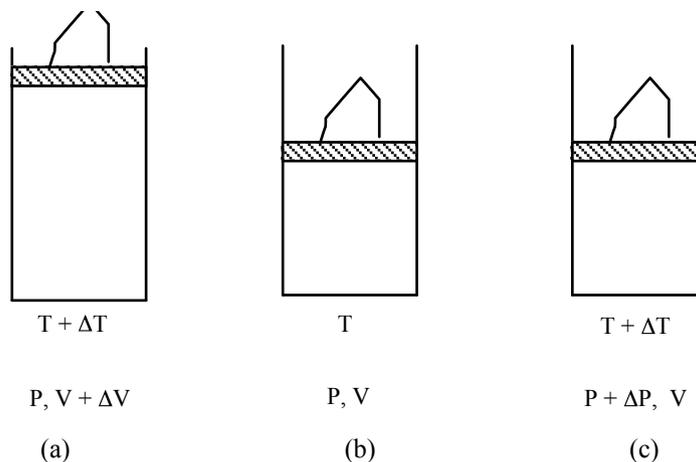
Esta predicción de la teoría cinética establece que la *energía interna* de un gas ideal es *proporcional a la temperatura Kelvin y sólo depende de la temperatura*, siendo independiente de la  $P$  y el  $V$ .

La temperatura de un gas puede elevarse en condiciones muy distintas. Por ejemplo manteniendo el volumen constante o bien manteniendo la presión constante, o pueden permitirse que ambos varíen de un modo arbitrario.

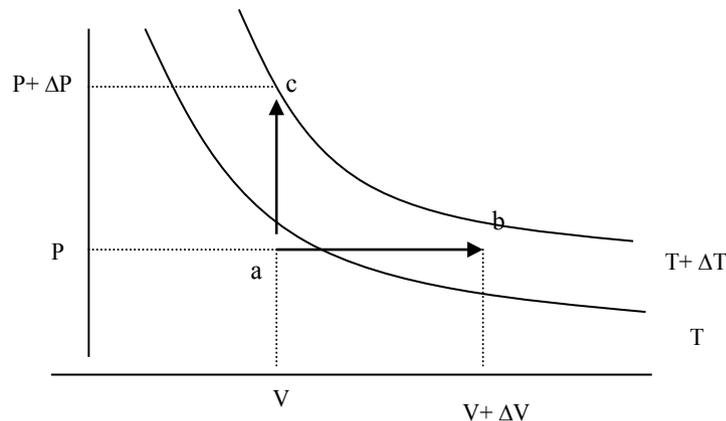
En cada uno de éstos casos, *resulta diferente la cantidad de calor* que se necesita para elevar un grado la temperatura de una unidad de masa del gas. Es decir, un gas posee distintas capacidades caloríficas específicas.

La capacidad calorífica de una sustancia es el calor que la unidad de masa requiere para sufrir un cambio de una unidad en su temperatura. Una unidad de masa conveniente es el *mol*. La capacidad calorífica correspondiente recibe el nombre de *capacidad calorífica molar* y se representa por  $C$ . En los gases, sólo son importantes dos tipos de capacidad calorífica molar, las consideradas a *volumen constante*  $C_V$  y a *presión constante*  $C_p$ .

Consideremos  $n$  moles de un gas ideal, encerrado en un dispositivo de cilindro y émbolo. La temperatura del gas puede aumentar o disminuirse a voluntad, de modo que se pueda añadir calor al sistema o extraerlo, según se desee.



Inicialmente el gas tiene una presión  $P$ , una temperatura  $T$ , y un volumen  $V$ , representado por el punto  $a$  del diagrama PV.



Si aumentamos la  $T$  del sistema a una temperatura  $(T+\Delta T)$ , a medida que esto ocurre añadimos arena al émbolo de modo que su volumen  $V$  no cambie. Este proceso *a volumen constante* hace pasar el sistema del punto  $a$  al  $c$ . Apliquemos la Primera Ley de la Termodinámica a este proceso:

$$\Delta U = Q - W$$

Por definición de  $C_v$  tenemos  $Q=nC_v\Delta T$ , y el trabajo realizado  $W=Pdv$  es nulo, porque  $\Delta V=0$ .

$$\Delta U = n C_v \Delta T$$

Si la misma masa del gas se calentase hasta una temperatura  $(T+\Delta T)$  pero ésta vez evitando que la carga de arena se altere, de manera que la *presión no cambie*. Este proceso a *presión constante*, hace pasar el sistema del punto  $a$  al  $b$ . Por definición de  $C_p$ ,  $Q=nC_p\Delta T$  también  $W=p\Delta V$ .

Ahora bien, en un gas ideal,  $U$  sólo depende de la temperatura. Como los dos procesos anteriores implican el mismo cambio  $\Delta T$  en la temperatura, también debe implicar el mismo cambio  $\Delta U$  en la *energía interna*, es decir  $\Delta U = nC_v\Delta T$ . Aplicando la Primera Ley de la Termodinámica:

$$\Delta U = Q - W$$

$$n C_v \Delta T = n C_p \Delta T - P \Delta V$$

$$n C_p \Delta T = n C_v \Delta T + P \Delta V$$

En un proceso a *presión constante*.

Apliquemos la ecuación de estado  $PV = nRT$  al proceso a presión constante, tomando diferencias:  $P\Delta V = nR\Delta T$  y combinando:

$$n (C_p - C_v) \Delta T = P \Delta V$$

$$n (C_p - C_v) \Delta T = n R \Delta T$$

$$R = C_p - C_v$$

Esto demuestra que la capacidad calorífica molar de un gas ideal a *presión constante* es siempre mayor que la

obtenida a volumen constante; en una cantidad igual a la constante universal de los gases  $R=1.987 \text{ cal/molgr K}$ .

Aunque la ecuación  $R = C_p - C_v$  sólo es exacta para un gas ideal, es casi verdadera para gases reales a una presión moderada.

## COMPRESIÓN O EXPANSIÓN ADIABÁTICA DE UN GAS IDEAL

Cuando se comprime adiabáticamente un gas ideal; el trabajo realizado sobre el gas sirve para aumentar su energía interna, y como la energía interna de un gas ideal sólo depende de su temperatura, ésta se eleva. Inversamente, en una expansión adiabática de un gas, ideal, la temperatura disminuye.

Para deducir la relación entre T-P y P-V en una *transformación adiabática*, utilicemos la Primera Ley de la Termodinámica y la ecuación de estado de un gas ideal:

En forma diferencial:  $dU = dQ - dW$

$$dU = Q - W$$

Para un proceso adiabático,  $Q=0$ ,  $W = PdV$ . Para un gas ideal U sólo depende de su temperatura,  $dU = nC_v dT$ .

$$n C_v dT = - P dV$$

$$n C_v dT + P dV = 0$$

Para un gas ideal

$$PV = n R T$$

$$P = \frac{nRT}{V}$$

$$n C_v dT + nRT \frac{dV}{V} = 0$$

Separando variables:

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_v} \frac{dV}{V} = 0$$

Como:

$$R = C_p - C_v; \implies \frac{R}{C_v} = \frac{C_p}{C_v} - 1$$

Si hacemos:

$$\gamma = C_p/C_v \quad \frac{R}{C_v} = \gamma - 1$$

Luego:

$$\frac{dT}{T} = (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0$$

Esta ecuación puede ser integrada, suponiendo que  $\gamma$  permanece aproximadamente constante.

$$\ln T + (\gamma-1) \ln V = \text{constante}$$

$$T V^{(\gamma-1)} = \text{constante}$$

Para los estados 1 y 2:

$$T_1 V_1^{(\gamma-1)} = T_2 V_2^{(\gamma-1)}$$

La relación entre P y V para una transformación adiabática se deduce a partir de:

$$T V^{(\gamma-1)} = \text{constante}$$

$$P V = n R T$$

$$T = \frac{PV}{nR}$$

$$\frac{PV}{nR} V^{(\gamma-1)} = \text{constante}$$

$$P V^{(\gamma)} = \text{constante}$$

De donde:

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

En la práctica es posible evaluar la relación de capacidades caloríficas  $\gamma$ , mediante datos de P y V ó T y V. Por ejemplo despejando  $\gamma$  de la ecuación anterior:

$$\ln P_1 + \gamma \ln V_1 = \ln P_2 + \gamma \ln V_2$$

$$\gamma = \frac{\ln P_2 - \ln P_1}{\ln V_1 - \ln V_2}$$

## LA EQUIPARTICIÓN DE LA ENERGÍA

Recordemos que la presión está relacionada con la energía cinética de las moléculas, mediante:

$$P = 1/3 \rho v^2$$

Multiplicando por V ambos miembros:

$$P V = 1/3 \rho V v^2$$

Donde:  $\rho V = \text{masa del gas}$ .

Esta masa del gas, también podemos escribirla como:

$$m = n M$$

$n = \text{número de moles}$

$M = \text{peso molecular}$

Sustituyendo:

$$P V = \frac{1}{3} m v^2 = \frac{1}{3} n M v^2$$

$$P V = \frac{1}{3} n M v^2$$

$\frac{1}{3} n M v^2$  corresponde a dos tercios de la energía cinética de traslación total de las moléculas: es decir  $\frac{2}{3} * (\frac{1}{2} n M v^2)$  podemos escribir:

$$P V = \frac{2}{3} * (\frac{1}{2} n M v^2)$$

Reemplazando la ecuación de estado de un gas ideal:  $PV = nRT$

$$n R T = \frac{2}{3} * (\frac{1}{2} n M v^2)$$

$$\frac{1}{2} M v^2 = \frac{3}{2} R T$$

Es decir: la *energía cinética traslacional total por mol de las moléculas de un gas ideal es proporcional a la temperatura*.

Si hablamos de energía total:

$$\frac{1}{2} M v^2 = \frac{3}{2} n R T$$

En otras palabras, la energía disponible solamente depende de la *temperatura* y se distribuye en partes iguales. Este teorema ha sido enunciado, sin haber sido probado, y se denomina **teorema de la equipartición de la energía**, demostrado por Maxwell.

Es decir en las moléculas gaseosas la energía cinética de traslación por mol es  $\frac{3}{2}RT$ .

Sin embargo la energía cinética de traslación por mol es la suma de tres términos, que son:  $\frac{1}{2}Mv_x^2$ ,  $\frac{1}{2}Mv_y^2$ ,  $\frac{1}{2}Mv_z^2$ . El teorema de la equipartición requiere que cada uno de estos términos *contribuya con la misma cantidad de energía* total por mol, o sea  $\frac{1}{2}RT$ .

En los *gases monoatómicos* las moléculas sólo tienen movimiento traslacional, de modo que:

$$U = \frac{3}{2} n R T$$

Además:

$$dU = n C_v dT \quad ; \quad C_v = \frac{dU}{n dT}$$

$$C_v = \frac{d[\frac{3}{2}nRT]}{n dT} = \frac{3}{2} R \frac{dT}{dT}$$

$$C_v = \frac{3}{2} R$$

Como:  $R = C_p - C_v$

$$C_p = \frac{5}{2} R$$

De donde:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad \gamma = 1.67$$

Ejemplos: He, Ar.

En los gases *diatómicos* existen dos tipos de movimientos *traslacional* y *rotacional*:

$$\text{Traslacional} = 3/2 n R T$$

$$\text{Rotacional} = (2 * 1/2 n R T) = n R T$$

Es decir:

$$U = 3/2 n R T + n R T$$

$$U = 5/2 n R T$$

$$dU = n C_v dT$$

$$C_v = \frac{dU}{n dT} = \frac{5 n R dT}{2 n dT}$$

$$C_v = 5/2 R ;$$

$$C_p = 7/2 R ;$$

$$\gamma = 1.40$$

Ejemplos: H<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, Cl<sub>2</sub>.

En un *gas poliatómico*, las moléculas tienen movimientos *traslacional* y *rotacional*:

$$\text{Traslacional} = 3/2 n R T$$

$$\text{Rotacional} = 3 * 1/2 n R T = 3/2 n R T$$

$$U = 3/2 n R T + 3/2 n R T$$

$$U = 3 n R T$$

$$C_v = \frac{dU}{n dT} = \frac{3 n R dT}{n dT}$$

$$C_v = 3 R ;$$

$$C_p = 4 R ;$$

$$\gamma = 1.33$$

Ejemplos: CO<sub>2</sub>, SO<sub>2</sub>, NH<sub>2</sub>, etc.

Los valores de  $\gamma$ , tanto para gases monoatómicos, diatómicos y poliatómicos, varían en la realidad, debido a que no se tomaron en cuenta, la *energía vibracional* de las moléculas, y cuando dos átomos chocan la energía cinética *traslacional* puede convertirse en energía interna de uno o de ambos átomos.

## LA ECUACIÓN DE VAN DER WAALS

La ecuación de estado para un gas ideal es:

$$P V = n R T$$

De esta ecuación y de los principios de la termodinámica se puede demostrar que la energía interna sólo depende de su temperatura.

Los *gases reales*, cumplen estas relaciones cuando  $\rho$  es pequeña.

En las *hipótesis de gas ideal*, se habló de que el volumen que ocupan las moléculas es pequeño comparado con el del recipiente, sin embargo *no* podemos ignorar el hecho de que las moléculas ocupan una fracción del volumen de que dispone el gas. Cuando la densidad es grande no se puede despreciar estos efectos.

Van Der Waals dedujo una ecuación de estado modificada que toma éstos efectos en cuenta.

El *volumen no nulo* de las moléculas implica que éstas, en lugar de tener un espacio vacío de volumen  $V$  para moverse, el espacio se encuentra parcialmente ocupado por ellas y *reducido* a  $(V - nb)$ , en donde  $nb$  es aproximadamente el *volumen ocupado por las moléculas*. En la ecuación de estado del gas ideal podríamos reemplazar:

$$P (V - nb) = n R T$$

Las *fuerzas atractivas* tienden a mantener el gas unido, y por tanto, la *presión que ejerce se reduce*.

La *presión promedio* ejercida por las moléculas disminuye en una cantidad proporcional al cuadrado de la densidad:

$$\text{Reduccion de la presión} = a \frac{n^2}{V^2}$$

Donde  $a$  = constante para cada gas:

$$P = \frac{n R T}{(V - nb)} - \frac{a n^2}{V^2}$$

Reorganizando ésta ecuación de modo que se parezca a  $PV=nRT$ ,:

$$P = \frac{RT}{\left(\frac{V}{n} - b\right)} - \frac{a}{\left(\frac{V}{n}\right)^2}$$

Si representamos *el volumen por molécula*:

$$V_m = \frac{V}{n}$$

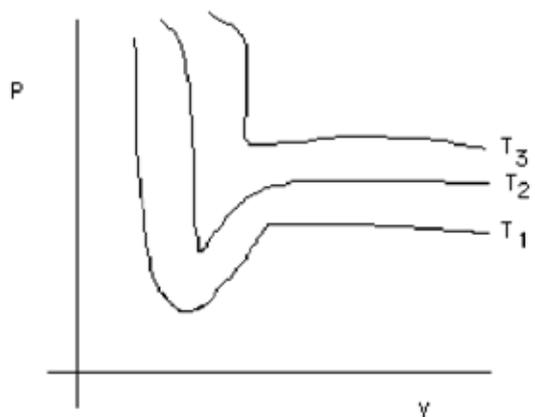
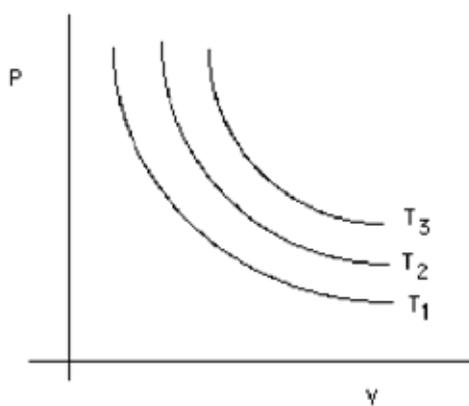
$$P = \frac{RT}{(V_m - b)} - \frac{a}{V_m^2}$$

Ecuación conocida como la Ecuación de Van Der Waals.

$a$  y  $b$  se calculan experimentalmente.

$$\frac{a}{v_m^2} = \text{presión interna}$$

A continuación se muestran los gráficos P – V para las ecuaciones de estado de un gas ideal y de un gas de Van der Waals.



## CAPITULO X

## LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA

Como ya hemos visto la *Primera Ley de la Termodinámica*, indica que la energía se conserva.

Sin embargo proporciona solamente una cantidad útil llamada *energía interna*, es decir mediante una receta, solamente medimos, cuantitativamente *los cambios de la energía interna*.

Podemos pensar en muchos procesos termodinámicos que conservan la energía, pero que nunca ocurren en realidad. Cuando un cuerpo caliente y un cuerpo frío se ponen en contacto, simplemente no sucede que el cuerpo caliente se caliente más y el que el frío se haga más frío, y sin embargo éste proceso "no viola la Primera Ley de la Termodinámica".

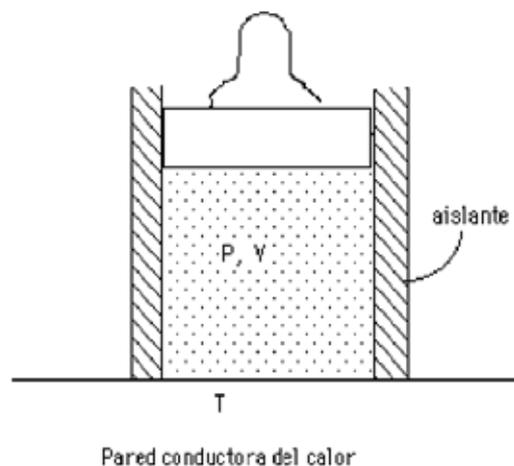
De igual manera, la *Primera Ley* no restringe la capacidad de convertir trabajo en calor o calor en trabajo y sólo especifica que la energía debe "conservarse durante el proceso".

Pero prácticamente ocurre que aunque una cantidad de trabajo puede convertirse totalmente en calor, *nunca* se ha podido encontrar un procedimiento que convierta por completo una cantidad dada de *calor en trabajo*.

La *Segunda Ley de la Termodinámica*, se ocupa de éste problema, es decir; de cuáles procesos que supuestamente cumplen con la *Primera Ley* ocurren o no en la naturaleza.

## PROCESOS REVERSIBLES E IRREVERSIBLES

Consideremos un sistema en equilibrio termodinámico. Una masa  $m$  de un gas (real) encerrado en un cilindro con émbolo, cuyo volumen es  $V$ , el gas tiene una presión  $P$  y una temperatura  $T$ .



En un *estado de equilibrio* estas variables termodinámicas permanecen constantes con el tiempo.

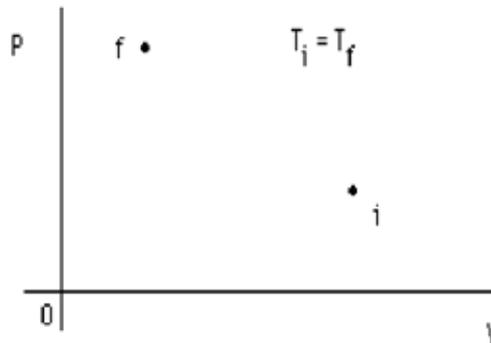
Supongamos que el cilindro tiene paredes aislantes (ideales) y cuya base es conductora del calor (ideal).

Cambiamos ahora el sistema hasta otro estado de equilibrio en el cuál la *temperatura T sea la misma*, pero cuyo volumen *V* se haya reducido a la mitad. Consideremos dos maneras de cambiar el sistema:

1. El émbolo se baja *muy rápidamente*, después se espera que se restablezca el equilibrio. Durante éste proceso, el gas es turbulento y su *P* y su *T* no están definidas.

Este proceso no puede representarse por una línea en un diagrama PV.

El sistema pasa de un estado de equilibrio *i* a otro *f* a través de una serie de estados que no son de equilibrio.



2. Suponiendo que no haya fricción, el émbolo se baja con *mucha lentitud* (añadiendo de poco a poco arena), de tal manera que *P*, *V* y *T* del gas sean, en todo tiempo cantidades bien definidas. Del depósito se habrá transferido una pequeña cantidad de calor, y en un tiempo pequeño, el sistema alcanzará un nuevo estado de equilibrio, siendo su temperatura otra vez igual a la del depósito.

Aumentando indefinidamente el número de cambios, y las correspondientes disminuciones del tamaño de cada cambio, llegamos a un proceso ideal, en el cual el sistema pasa a través de una sucesión continua de estados de equilibrio, que podemos representar gráficamente como una *línea continua* en el diagrama PV.

Los procesos del tipo I se llaman *procesos irreversibles*.

Un *proceso reversible* es uno en el que la trayectoria puede invertirse mediante un cambio diferencial en su medio ambiente. (presión +  $dP$  ó -  $dP$ , fuerza de fricción no sería reversible. *Cuasiestáticos* procesos que ocurren con mucha lentitud, no siempre son reversibles).

En la práctica todos los procesos son *irreversibles*, pero nos podemos aproximar a la *reversibilidad* tanto como queramos efectuando los arreglos experimentales adecuados (gas real y gas ideal).

## MOTOR TERMICO

Es posible extraer calor y utilizarlo para acondicionar habitaciones, cocinar o mantener un horno a elevada temperatura.

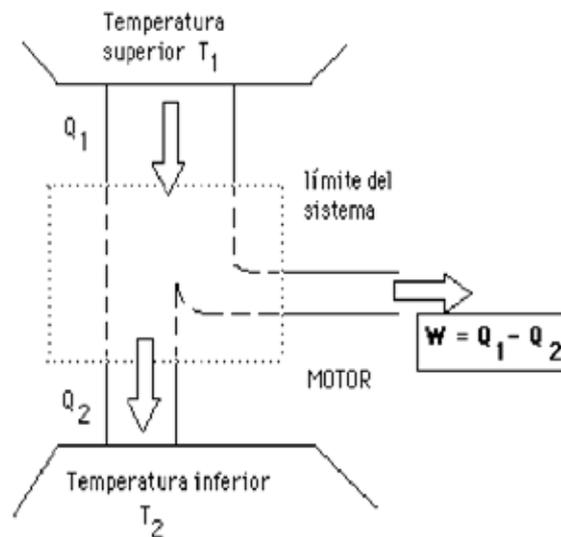
Pero, para mover una máquina o propulsar un vehículo o un proyectil se requiere energía mecánica, y uno de los grandes problemas es extraer calor de un foco a temperatura elevada y convertir la mayor fracción posible de él en energía mecánica.

En las primeras máquinas térmicas, solamente una pequeña fracción del calor absorbido de la fuente con mayor temperatura podía convertirse en trabajo útil. Había la esperanza de inventar una máquina que pudiese tomar calor de un depósito abundante, como el océano, y convertirlo completamente en trabajo útil.

Esta ambición no violaría la Primera Ley de la Termodinámica sin embargo nunca se ha alcanzado ésta ambición y hay razones para creer que nunca se alcanzará.

La transformación de energía calorífica en energía mecánica, exige siempre el empleo de un *motor térmico* (una máquina de vapor, un motor de gasolina, de diesel o un motor de reacción).

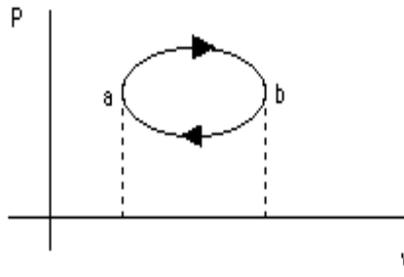
Las transformaciones de energía de un motor térmico se muestran en el siguiente diagrama:



El *motor térmico* o *máquina térmica*, toma calor de  $Q_1$ , de la fuente a la temperatura superior  $T_1$ . Algo del calor  $Q_1$  tomado por la máquina se convierte en trabajo  $W$ , pero el resto se cede como calor  $Q_2$  a una fuente de temperatura inferior  $T_2$ .

Para simplificar el problema, consideremos un motor en el cual la sustancia de trabajo experimenta *un ciclo*. Esto es una serie de procesos al cabo de los cuales vuelve a su estado inicial (en un frigorífico doméstico, el refrigerante efectúa un proceso cíclico).

Si la sustancia de trabajo realiza un ciclo, es decir, vuelve periódicamente a su estado inicial, la variación de energía interna en un número cualquiera de ciclos es nula. En virtud de la Primera Ley:



$$\Delta U = Q_{\text{total}} - W_{\text{total}}$$

$$\Delta U = 0$$

$$W_t = Q_{\text{total}}$$

$$Q_{\text{total}} = Q_1 + (-Q_2) = Q_1 - Q_2$$

$$W_t = W$$

$$W = Q_1 - Q_2$$

Es decir, el trabajo mecánico, realizado por una máquina térmica es igual "a la diferencia entre el calor suministrado al motor y el cedido por éste". (considerando  $Q_1$  y  $Q_2$  positivos).

La eficiencia  $\eta$  de una máquina térmica, es la relación entre el trabajo neto efectuado por la máquina durante un ciclo, y el calor que se toma de la fuente de mayor temperatura en el mismo ciclo:

$$\eta = \frac{W}{Q_1}$$

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

Que demuestra que la eficiencia de una máquina térmica es siempre menor a uno (100%) *en tanto que el calor  $Q_2$ , cedido al escape no sea cero.*

Sadi Carnot, ingeniero francés, ya había demostrado éste hecho. La experiencia actual, nos muestra que todo motor térmico expulsa siempre algún calor.

## MOTOR DE GASOLINA

El motor corriente de gasolina es del tipo de cuatro tiempo, porque en cada ciclo tienen lugar cuatro procesos.

Si partimos en el instante en que el pistón se encuentra en la parte superior de su carrera, se introduce en el cilindro, durante la carrera descendente, una mezcla explosiva de vapor de gasolina y aire, permaneciendo abierta la válvula de admisión y cerrada la de escape. Esta es la *carrera de admisión*.

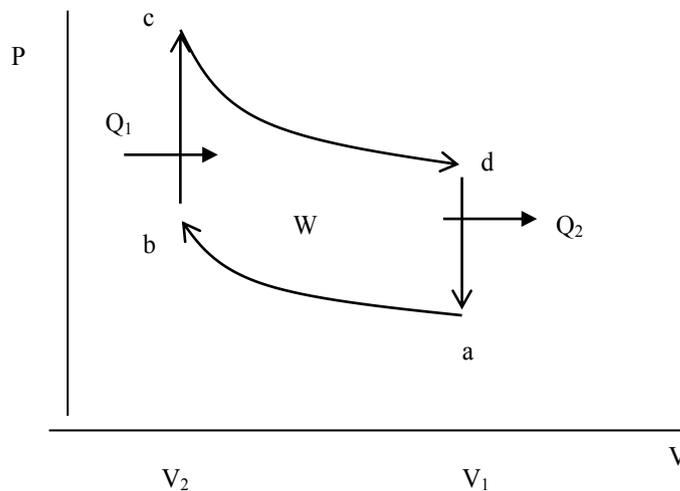
Al final de ella, la válvula de admisión se cierra y se eleva el pistón, realizándose una compresión, aproximadamente *adiabática*. Esta es la *carrera de compresión*.

En el extremo de ésta carrera, o cerca de él, una chispa inflama la mezcla de vapor de gasolina y aire, cuya combustión tiene lugar muy rápidamente; la presión y temperatura aumentan, aproximadamente a *volumen constante*.

El pistón es ahora empujado hacia abajo, al expandirse de modo aproximadamente *adiabático* los gases resultantes de la combustión. Esta es la *carrera de trabajo*, al terminar la cual se abre la válvula de escape.

La presión dentro del cilindro disminuye rápidamente hasta la atmosférica, y el pistón, al levantarse durante la *carrera de escape*, obliga a salir a los gases que quedan. Se cierra ahora la válvula de escape, se abre la de admisión y se repite el ciclo.

Para fines de cálculo, el ciclo de un motor de gasolina puede sustituirse aproximadamente por el *ciclo Otto*.



Partiendo del punto *a*, se comprime *adiabáticamente* aire a la presión atmosférica hasta el punto *b*; después es calentado a *volumen constante* hasta *c*, luego se le permite expandirse *adiabáticamente* hasta *d* y por último, se enfría a *volumen constante* hasta el punto *a*, repitiéndose el ciclo.

La línea *ab* corresponde a la carrera de *compresión*; *bc* a la *explosión*; *cd* a la *carrera de trabajo* y *da* al *escape*.

El cociente  $V_1/V_2$  se denomina *razón de compresión*, y es aproximadamente 10 para un motor moderno de combustión interna.

El trabajo realizado viene representado por el área achurada encerrada en el contorno *abcd*. El calor se suministra a volumen constante a lo largo de la línea *bc*, y se cede a lo largo de *da*.

Suponiendo que el aire se comporta como un gas ideal, el calor suministrado y el trabajo realizado (rendimiento) pueden calcular en función de la razón de compresión:

$$\eta = \left[ 1 - \frac{1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}} \right] * 100$$

Donde  $\gamma$  es la razón de los calores específicos a presión y a volumen constante.

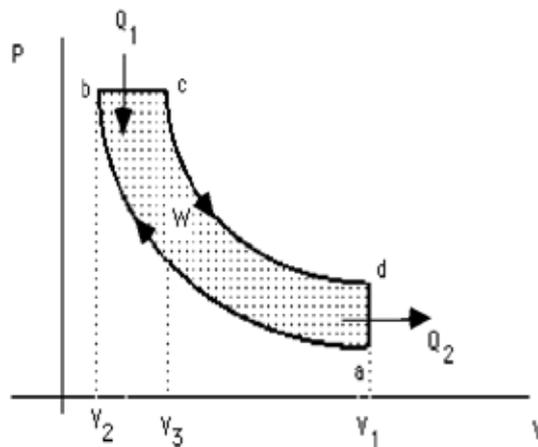
Para una razón de compresión de 10 y un valor  $\gamma = 1.4$ , el rendimiento es del 60 %, aproximadamente.

(Rendimiento mayor a relación de compresión mayor, temperatura de salida muy elevada, problemas de explosión espontánea, problemas de resistencia mecánica y deterioro de las piezas del motor).

## MOTOR DIESEL

En el *Ciclo Diesel* (o de *Stirling*?), penetra aire en el cilindro durante la carrera de admisión y se comprime adiabáticamente durante la compresión hasta una temperatura suficientemente alta para que el aceite combustible inyectado al finalizar esta carrera arda en el cilindro. sin necesidad de ser inflamado por una chispa.

La combustión no es tan rápida como en el motor de gasolina, y la primera parte de la carrera de trabajo se verifica a presión casi constante. El resto de la misma es una expansión adiabática, a ésta sigue la carrera de escape, que completa el ciclo. El ciclo diesel, puede representarse en un diagrama P-V por el ciclo de Stirling.



Partiendo del punto *a*, el aire es comprimido *adiabáticamente* hasta *b*; después, calentado a *presión constante* hasta *c*; a continuación se le deja expandir *adiabáticamente* hasta *d*, y por último se enfría a *volumen constante* hasta el punto *a*.

Puesto que en cilindro de un motor diesel no hay combustible durante la carrera de compresión, no existe posibilidad de que se produzca encendido prematuro y la razón de compresión  $V_1/V_2$  puede ser mucho mayor que en el motor de combustión interna. Es típico el valor de 15. la *relación de expansión* vale con frecuencia 5. Con estos valores, el rendimiento de un ciclo Diesel se calcula en 56 % aproximadamente.

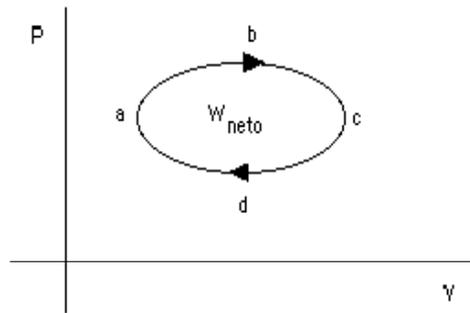
## EL CICLO DE CARNOT

Supongamos una sustancia de trabajo (por ejemplo un gas ideal) en un estado de equilibrio dentro de un cilindro con un émbolo.

Efectuando cambios en el medio ambiente del sistema, podemos efectuar una amplia variedad de procesos. Por ejemplo que el gas se dilate, o se comprima, podemos añadir o sustraer energía en forma de calor, también podemos efectuar una secuencia de procesos tales que el sistema regrese a su estado de equilibrio original, etc.

Consideremos un *ciclo reversible*, en un diagrama PV.

A lo largo de la curva *abc*, el sistema se dilata, y el área bajo ésta curva representa el trabajo efectuado *por el sistema* durante la dilatación.



A lo largo de la curva *cda*, que lo lleva a su estado original, se comprime el sistema, y el área bajo ésta curva representa el trabajo que debe realizarse *sobre el sistema*, durante la compresión.

De aquí el *trabajo neto* efectuado *por* el sistema está representado por el área encerrada por la curva y es *positivo*. Si el ciclo se recorre en sentido opuesto (*adc* y *cba*) el trabajo neto es negativo.

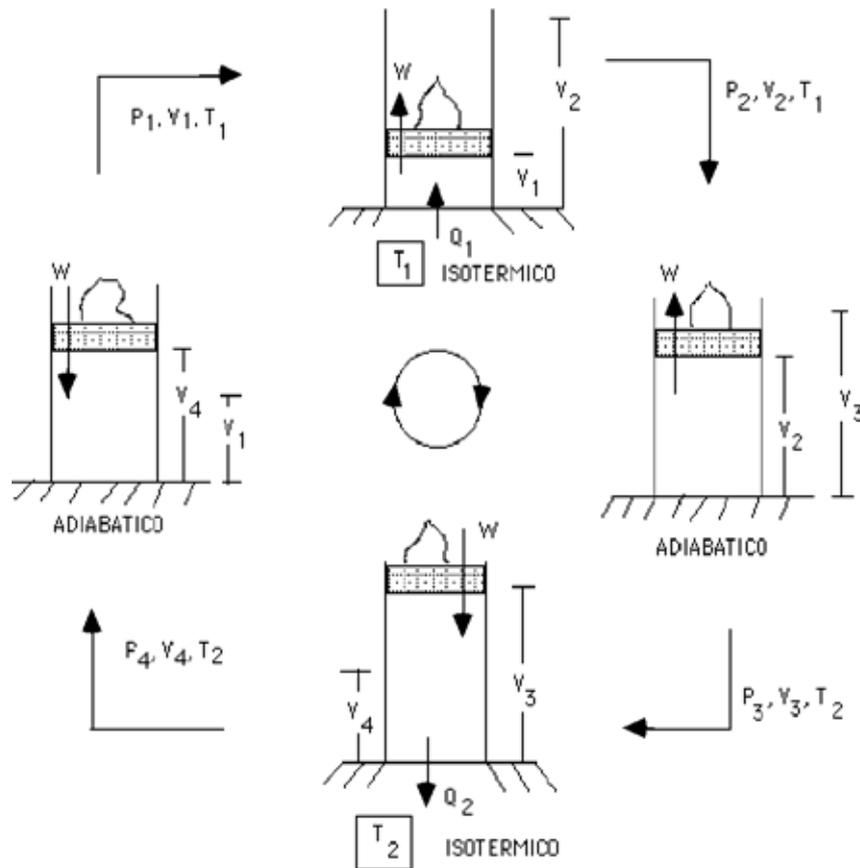
Un *ciclo reversible* es el *Ciclo de Carnot*.

El Ciclo de Carnot determina, el límite de la capacidad de convertir *calor en trabajo*.

El sistema está formado por una *sustancia de trabajo*, tal como un gas, y el ciclo, consta de *dos procesos reversibles isotérmicos y de dos adiabáticos*.

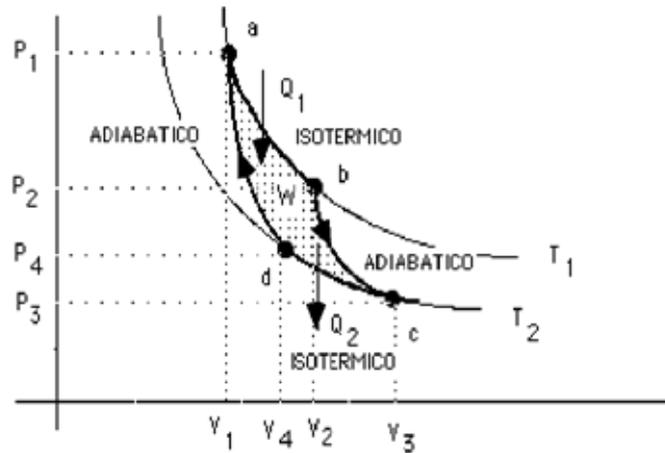
La sustancia de trabajo, un gas ideal, está contenido en un cilindro que tiene un base conductora de calor, y unas paredes y un émbolo no conductores.

Podemos proporcionar un depósito de calor a una temperatura  $T_1$  y otro a una temperatura  $T_2$  inferior, y un soporte no conductor.



- PASO 1 El gas, está en su estado de equilibrio inicial representado por  $P_1, V_1$  y  $T_1$ . Dejamos que el gas *se dilate* lentamente hasta  $P_2, V_2, T_1$ . El gas absorbe una energía calorífica  $Q_1$  por conducción desde la base. La dilatación es isotérmica y el gas *efectúa* un trabajo.
- PASO 2 Hacemos que la dilatación continúe, pero *adiabáticamente* (sin que entre ni salga calor del sistema) hasta  $P_3, V_3$  y  $T_2$ . El gas *efectúa un trabajo* elevando al émbolo y su temperatura *disminuye* hasta  $T_2$ .
- PASO 3 Comprimimos el gas lentamente, hasta  $P_4, V_4, T_2$ . Durante éste proceso se transfiere energía calorífica  $Q_2$  del gas a un depósito de calor  $T_2$  (más frío). La compresión es *isotérmica* y *se efectúa trabajo sobre el gas* a través del pistón y de su carga.
- PASO 4 Seguimos comprimiendo el gas, pero *adiabáticamente*, hasta su condición inicial,  $P_1, V_1, T_1$ . Se debe efectuar *trabajo sobre el sistema* y su temperatura se *leva* hasta  $T_1$ .

Representemos en un diagrama PV.



El trabajo neto  $W$  efectuado *por* el sistema está representado por el área encerrada en el trayectoria  $abcda$ .

La cantidad total de energía calorífica recibida por el sistema en el ciclo es  $(Q_1 - Q_2)$ , en donde  $Q_1$  es el calor absorbido en el paso 1 y  $Q_2$  es el cedido en el paso 3. Como los estados inicial y final coinciden (ciclo cerrado), no hay cambio neto en la energía interna  $U$  del sistema, por lo tanto, de la Primera Ley:

$$\Delta U = Q - W$$

$$Q_t = Q_1 + (-Q_2)$$

$$W = Q_1 - Q_2$$

Se puede obtener cualquier cantidad de trabajo requerido, simplemente repitiendo el ciclo. De aquí que el sistema actúe como una máquina térmica.

Aunque las máquinas térmicas reales no operan sobre un ciclo reversible, el *Ciclo de Carnot* que si lo es, proporciona información útil sobre el comportamiento de cualquier máquina térmica. “*Establece un límite superior*” en el rendimiento de las máquinas reales y por lo tanto fija una meta a alcanzar.

Recordemos, la eficiencia de una máquina térmica; (o del Ciclo de Carnot):

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

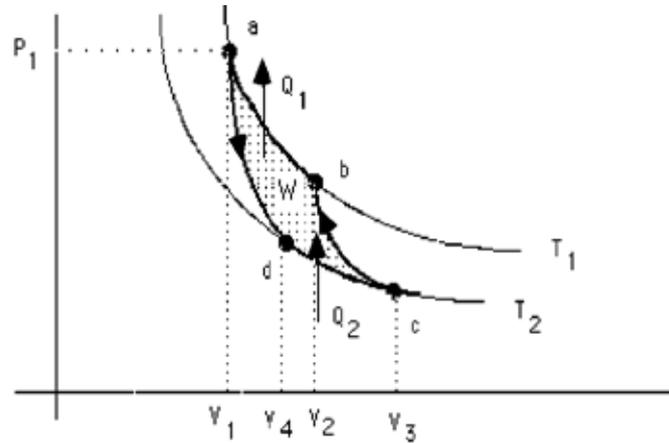
$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

## FRIGORÍFICO

Un frigorífico puede considerarse como un motor térmico que funciona en sentido inverso.

Es decir, un motor térmico, toma calor de un foco caliente, transforma parte de él en trabajo mecánico y cede la diferencia en forma de calor a un foco frío. En cambio *un frigorífico toma calor de un foco frío*, recibe trabajo mecánico del compresor, y cede calor a un foco caliente (el medio ambiente).

Tomemos el diagrama anterior de un ciclo de un motor térmico y recorramos en sentido inverso.



Entonces, *se extrae* una cierta cantidad de calor  $Q_2$  de un depósito a menor temperatura  $T_2$  y se transfiere una cierta cantidad de calor  $Q_1$ , al depósito caliente, un agente externo, realiza un trabajo sobre el sistema.

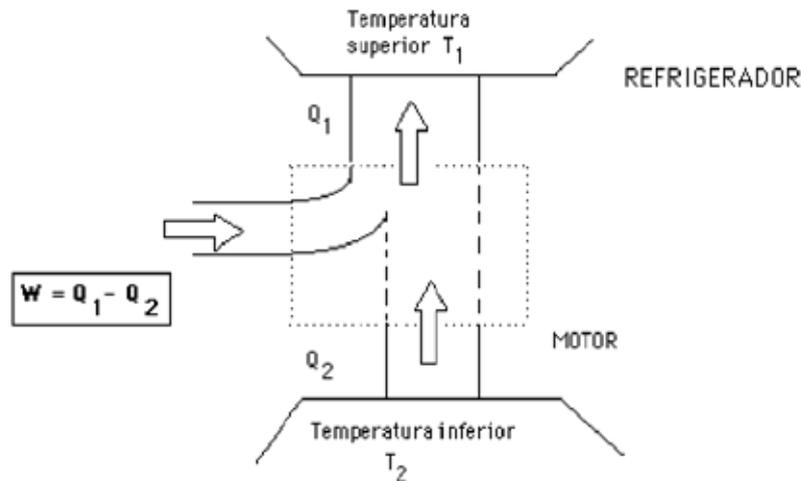
De éste depósito puede extraerse cualquier cantidad de calor, simplemente repitiendo el ciclo.

El *coeficiente de ejecución* de un frigorífico es:

$$\eta = \frac{Q_2}{W}$$

$$\eta = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

Las transformaciones de energía en un refrigerador se muestran en el diagrama siguiente:



## LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA

Hemos anotado que cuando se construyeron las primeras máquinas, había la esperanza de inventar *una máquina* que pudiese tomar calor de un depósito abundante, como el océano y convertirlo completamente en trabajo útil.

De igual manera, podríamos inventar un refrigerador el cual simplemente transfiera calor de un cuerpo frío a un cuerpo caliente, sin requerir el gasto de un trabajo exterior.

"Ninguna de éstas prometedoras ambiciones violaría la Primera Ley de la Termodinámica", sin embargo "nunca se han alcanzado ninguna de éstas ambiciones y hay razones para creer que nunca se alcanzarán".

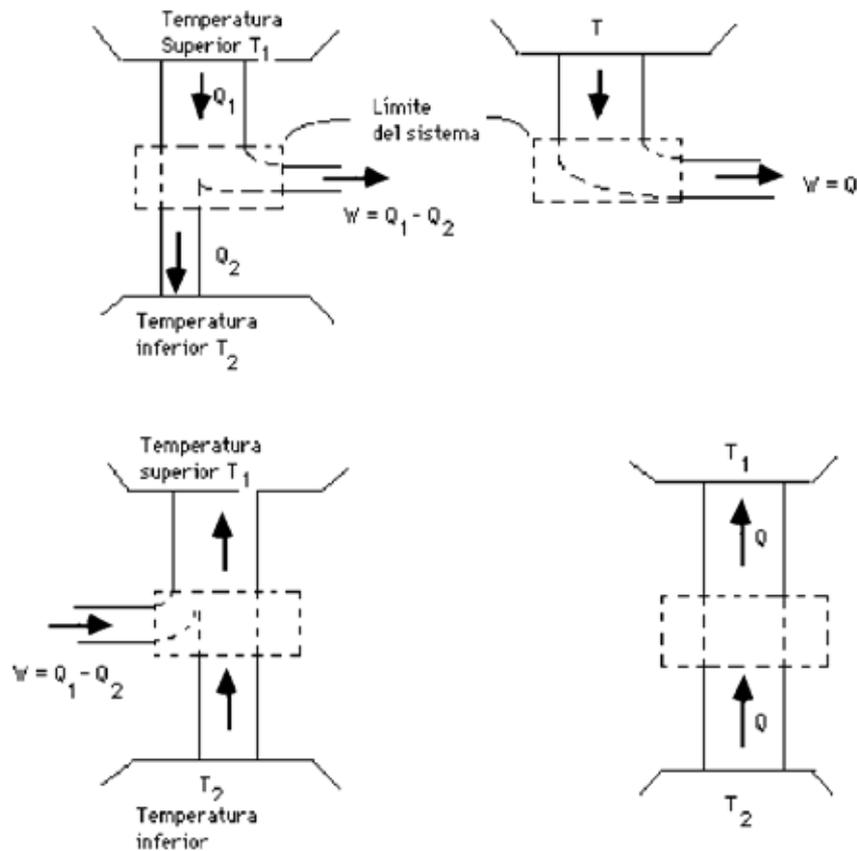
La Segunda Ley de la Termodinámica, que es una generalización de la experiencia, es una afirmación de que dichos mecanismos no existen.

Hay dos enunciados clásicos de la Segunda Ley, conocidos como el enunciado de *Clausius* y el enunciado de *Kelvin Planck*, y puede demostrarse que ambos son equivalentes entre sí.

*Enunciado de Clausius*: "Es imposible construir una máquina cíclica que no produzca otro efecto que el de transferir continuamente calor de un cuerpo a otro que esté a mayor temperatura". Este enunciado descarta el refrigerador perfecto.

Por experiencia sabemos que cuando dos cuerpos están en contacto, la energía calorífica fluye del cuerpo caliente al cuerpo frío. Este sentido solamente puede invertirse mediante un gasto de trabajo.

*Enunciado de Kelvin - Planck*: "Es imposible que exista una transformación, cuyo único resultado final fuese convertir en trabajo el calor extraído de una fuente que estuviese siempre a la misma temperatura". Este enunciado descarta a la *máquina térmica perfecta*, ya que implica que no es posible producir trabajo mecánico extrayendo el calor de una depósito sin devolver algún calor a otro depósito que esté a menor temperatura.



## LA EFICIENCIA DE LAS MAQUINAS

Carnot estableció el concepto de la *máquina reversible* y del *ciclo reversible* que lleva su nombre, y enunció un teorema de gran importancia:

"La *eficiencia* de todas las *máquinas reversibles* que operen entre las mismas temperaturas es la misma y ninguna *máquina irreversible* que opere entre las mismas temperaturas puede tener una eficiencia mayor a aquella".

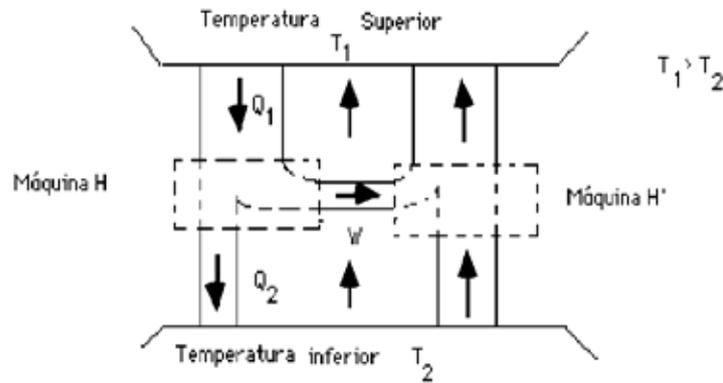
Clausius y Kelvin demostraron que éste teorema era una consecuencia necesaria de la Segunda Ley de la Termodinámica.

Sean H y H' dos *máquinas reversibles*, que operen entre las temperaturas  $T_1$  y  $T_2$  donde  $T_1 > T_2$ . Pueden diferir por ejemplo, en su sustancia de trabajo, o en sus presiones iniciales, o en las longitudes de sus carreras.

Digamos que H funciona "hacia adelante" y H' hacia atrás (como un refrigerador).

La máquina H toma energía calorífica  $Q_1$  a  $T_1$  y cede energía calorífica  $Q_2$  a  $T_2$ .

La máquina H', toma calor  $Q_2'$  a  $T_2$  y cede calor  $Q_1'$  a  $T_1$ . Conectemos, en forma mecánica a ambas máquinas de modo que el trabajo  $W$  por el ciclo efectuado por H sea justamente el suficiente para operar H'.



Supongamos que:

$$\eta > \eta'$$

Suposición !!!!

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} > \frac{Q_1' - Q_2'}{Q_1'}$$

Como el trabajo por ciclo efectuado por una máquina es igual al trabajo por ciclo efectuado por la otra:

$$W = W'$$

$$Q_1 - Q_2 = Q_1' - Q_2'$$

Comparando éstas relaciones vemos que :  $(Q_1 - Q_2 > 0)$

$$\frac{1}{Q_1} > \frac{1}{Q_1'}$$

De donde:

$$Q_1' > Q_1$$

Ya que :  $Q_1 - Q_2 = Q_1' - Q_2'$

$$Q_2' > Q_2$$

Es decir, que la *fente caliente gana*, la cantidad de calor  $(Q_1' - Q_1)$  “positiva” y la *fente fría pierde* la cantidad de calor  $(Q_2' - Q_2)$  “positiva”.

Pero el sistema combinado H + H' no efectúa ningún trabajo en el proceso, de modo que *hemos transferido calor* desde un cuerpo frío a un cuerpo caliente, en directa contradicción con el enunciado de Clausius.

Por lo tanto  $\eta$  no puede ser mayor que  $\eta'$ .

De igual manera invirtiendo las máquinas podemos demostrar que  $\eta'$  no puede ser mayor que  $\eta$ , por lo tanto:

$$\eta = \eta'$$

Lo que prueba la primera parte del *Teorema de Carnot* (La eficiencia de todas las máquinas reversibles que operen entre las mismas temperaturas, es la misma ...).

Supongamos ahora que H es una *máquina irreversible*, por el mismo procedimiento anterior podemos demostrar que:

$$\eta_{irrev} \text{ no puede ser mayor que } \eta'$$

Pero H no puede invertirse, de modo que no podemos demostrar que  $\eta'$  no puede ser mayor que  $\eta_{irrev}$ . Por tanto  $\eta_{irrev}$  es *igual o menor* que  $\eta'$ . Como  $\eta' = \eta = \eta_{irrev}$  tenemos que:

$$\eta_{irrev} \leq \eta_{rev}$$

Lo que prueba la segunda parte del Teorema de Carnot (...y ninguna máquina irreversible que opere entre estas mismas temperaturas puede tener una eficiencia mayor que aquella).

## LA ESCALA KELVIN DE TEMPERATURAS

La eficiencia de una máquina reversible es independiente de la sustancia de trabajo y *sólo depende de las temperaturas* entre las cuales opera:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$Q_2/Q_1$  sólo puede depender de las *temperaturas*.

Esto propició que Kelvin sugiriera una nueva escala de temperaturas. Si  $T_1$  y  $T_2$  representan a éstas dos temperaturas, entonces la ecuación que propuso fue:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_2}$$

Es decir, la relación entre las temperaturas es igual a la de los calores absorbido y entregado, respectivamente, por una máquina de Carnot que operase entre éstas temperaturas.

Tal escala recibe el nombre de *escala termodinámica (o Kelvin) de temperaturas*.

Para completar la definición de la escala termodinámica, se asigna arbitrariamente el valor de 273.16 a la temperatura del *punto triple del agua*. Por tanto  $T_{tr} = 273.16$  K.

Entonces, en una máquina de Carnot que opere entre depósitos de calor y que se encuentren a las temperaturas T y  $T_{tr}$ , se cumple que:

$$\frac{T}{T_{tr}} = \frac{Q}{Q_{tr}}$$

$$T = T_{tr} \frac{Q}{Q_{tr}}$$

Sin embargo,  $Q$  no depende de las características de la sustancia, por lo tanto se cuenta con una escala de temperaturas que no tiene las objeción que se le pueden hacer a la escala de los gases ideales, con lo que se logra *una definición fundamental* de la temperatura.

La definición de la temperatura termodinámica permite reescribir la ecuación de la eficiencia de una *máquina reversible* como:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

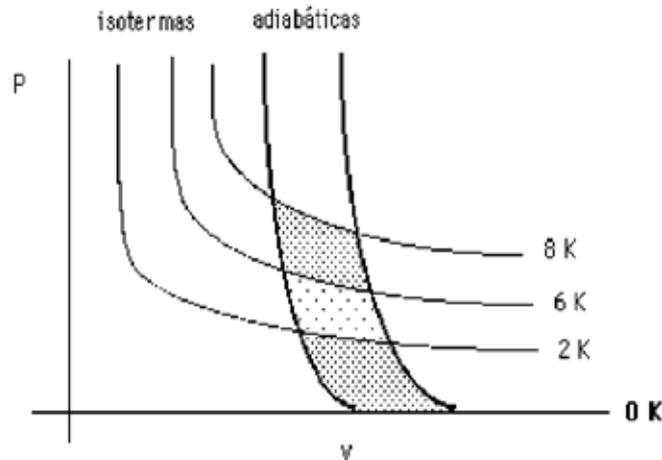
$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Donde  $T$  debe estar necesariamente expresada en K.

## EL CERO ABSOLUTO

Imaginemos una serie de motores de Carnot.

El primer motor absorbe el calor  $Q$  de un foco, realiza el trabajo  $W$  y expulsa una cantidad menor de calor a una temperatura más baja. El segundo motor absorbe el calor expulsado por el primero a la misma temperatura que lo ha cedido, realiza también cierto trabajo y cede una cantidad de calor aún menor a temperatura todavía inferior y así sucesivamente.



Las temperaturas a las cuales cada motor cede calor son cada vez más bajas, cuya temperatura límite será *el cero absoluto*.

De aquí de imaginar la posibilidad de un *último motor que no cedería calor* a un temperatura, que será *el cero absoluto*.

"*El cero absoluto*, es la temperatura de un foco al cuál no se cede cantidad alguna de calor por un motor que funcione entre éste foco y otro a temperatura más elevada".

Esta definición del Cero Absoluto se aplica a todas las sustancias y es "independiente de las propiedades de cualquiera de ellas".

Como:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Para obtener una eficiencia del 100 %  $T_2$  debe ser cero.

Sólo cuando el depósito a menor temperatura se encuentre en el cero absoluto se convertirá totalmente en trabajo el calor absorbido del depósito a mayor temperatura.

Por lo tanto, y en virtud de que no se puede disponer de un depósito al cero absoluto, es prácticamente imposible tener una máquina térmica con eficiencia del 100 %.

## LA ENTROPIA Y LA SEGUNDA LEY

La Ley Cero de la Termodinámica está ligada al concepto de temperatura  $T$  y la Primera Ley está relacionada al concepto de energía interna  $U$ .

En ésta sección veremos como la Segunda Ley de la Termodinámica está ligada a una variable termodinámica que se llama *entropía*.

Para un Ciclo de Carnot , hemos visto que:

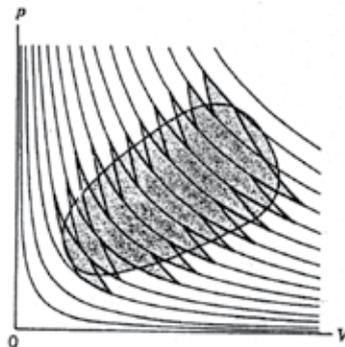
$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

En donde las diversas  $Q$  se consideran positivas, es decir sólo tratamos con los valores absolutos de las  $Q$ .

"Si ahora las interpretamos como cantidades algebraicas, de manera que  $Q$  sea positiva cuando entre calor al sistema y negativa cuando salga", podemos escribir:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Ecuación que indica que en un Ciclo de CARNOT, la suma de las cantidades algebraicas  $Q/T$  es cero.



Para un conjunto de Ciclos de Carnot, compuesto por una serie de líneas isotérmicas y adiabáticas, podemos escribir:

$$\sum \frac{Q}{T} = 0$$

O en el límite de diferencias infinitesimales:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

$\oint$  debe evaluarse en un *ciclo*, empezando y terminando en un punto cualquiera arbitrario.

Si la integral de una cantidad alrededor de cualquier trayectoria cerrada es cero, se dice que dicha cantidad es una variable de estado, es decir que tiene un valor solamente que es característico del estado del sistema, sin importar el camino recorrido.

Denominaremos "entropía S" a ésta variable:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

$$\oint dS = 0$$

$$S [=] \frac{\text{cal}}{\text{molgr K}} = \frac{\text{cal}}{\text{gr K}}$$

(U, P, T son variables de estado y se cumple  $\oint dx = 0$ ).

Q y W no son variables de estado  $\oint dx \neq 0$  pues dependen de la trayectoria.

$$\oint dS = 0$$

Para un *proceso reversible*

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

Para los *procesos irreversibles*, se toma cualquier trayectoria *reversible* que conecte a los estados 1 y 2 y se calcula el cambio de entropía en dicha trayectoria.

Veamos como la entropía aumenta en los sistemas irreversibles.

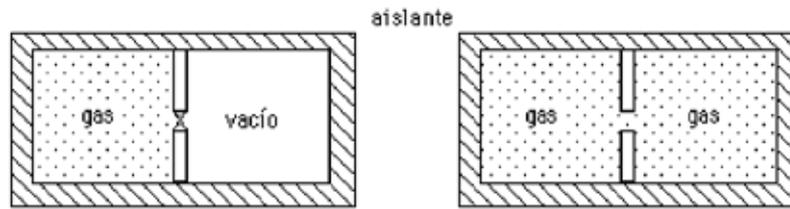
## LA ENTROPIA EN LOS PROCESOS IRREVERSIBLES

### DILATACIÓN LIBRE

Hagamos que un gas duplique su volumen dilatándose en un recinto evacuado.

Como no se efectúa ningún trabajo contra el vacío  $W = 0$ , y como el gas está encerrado por paredes no conductoras  $Q = 0$ , por la Primera Ley:  $\Delta U = 0$ .

$$U_2 = U_1$$



Si el gas es un gas ideal,  $U$  sólo depende de la temperatura y no de la presión ni del volumen, de modo que  $T_2 = T_1$ .

La dilatación libre es ciertamente irreversible.

Sin embargo, hay una diferencia de entropía  $S_2 - S_1$ , no podemos utilizar la ecuación,

$$\oint_1^2 \frac{dQ}{T} = S_2 - S_1$$

Ya que  $Q = 0$ .

Como calcular  $S_2 - S_1$  en una dilatación libre?. Lo hacemos encontrando una trayectoria reversible que conecte los estados 1 y 2 y calcularemos el cambio de entropía en dicha trayectoria.

En la dilatación libre la trayectoria reversible conveniente es de una *dilatación isotérmica* desde  $V_1$  a  $V_2$ ;  $2V_1 = V_2$  que corresponde a la *expansión isotérmica ab* del Ciclo de Carnot.

El trabajo efectuado por el gas (a temperatura constante) es:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P dV$$

$$PV = nRT; \quad P = \frac{nRT}{V}$$

Reemplazando:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$Q = W = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$S_2 - S_1 = \oint_1^2 \frac{dQ}{T} = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Si:  $V_2 = 2V_1$

$$S_2 - S_1 = nR \ln 2$$

$$(S_2 - S_1) > 0$$

Esta cantidad es positiva, de modo que en tal proceso *irreversible* y adiabático la *entropía* de sistema aumenta.

## CONDUCCIÓN DEL CALOR

Consideremos dos cuerpos, uno caliente  $T_1$  y otro frío a  $T_2$ , ambos se introducen dentro de una caja que tenga paredes no conductoras.

Ambos llegarán finalmente a una temperatura común intermedia  $T_m$ . Este proceso es *irreversible*. Igual que antes podemos calcular el cambio de entropía encontrando de nuevo, un proceso *reversible* que conecte los mismos estados inicial y final 1 y 2.

Supongamos que  $Q$  es el calor transferido por el cuerpo  $T_1$  y el calor ganado por  $T_2$ .

El cuerpo caliente *pierde entropía*, en una cantidad aproximada:

$$\Delta S_1 = - \frac{Q}{T_{1m}}$$

$$T_{1m} = \frac{T_1 + T_m}{2}$$

El cuerpo frío *gana entropía*, en una cantidad aproximada:

$$\Delta S_2 = + \frac{Q}{T_{2m}}$$

$$T_{2m} = \frac{T_2 + T_m}{2}$$

Como los dos cuerpos, alcanzan la misma temperatura intermedia,  $T_m$ :

$$S_2 - S_1 = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

$$S_2 - S_1 = - \frac{Q}{T_{1m}} + \frac{Q}{T_{2m}}$$

Pero:

$$T_{1m} > T_{2m}$$

$$S_2 > S_1$$

De nuevo, en éste procesos *irreversible* la entropía ha aumentado.

## LA ENTROPIA Y EL DESORDEN

Podemos ahora, sobre la base de la experiencia, resumir, en el enunciado de la Segunda Ley de la Termodinámica:

"Un proceso natural que comienza en un estado de equilibrio y termina en otro ocurrirá en la dirección que haga que la *entropía* del sistema y de su medio ambiente *aumente*".

"...existe una cantidad útil llamada *entropía*..."

Del enunciado de la Segunda Ley y de las observaciones sobre los procesos reversibles en el párrafo anterior, se llega a la conclusión de que:

$$S_2 = S_1 \quad (\text{procesos adiabáticos reversibles})$$

$$S_2 > S_1 \quad (\text{procesos adiabáticos irreversibles})$$

$S_2$  = entropía final del sistema

$S_1$  = entropía inicial del sistema

La *entropía* está asociada con el desorden y el enunciado de la Segunda Ley que establece que un proceso natural tiende a aumentar la entropía del (sistema + su medio ambiente) es equivalente a decir que el *desorden* (del sistema + su medio ambiente) tiende a incrementarse.

Entropía = Desorden

*Expansión libre* Se permite que las moléculas gaseosas confinadas a una mitad de la caja la ocupen por completo. *El sistema se desordenado, o el desorden ha aumentado.*

"Las moléculas se encuentran dentro de la es caja" es más débil que el enunciado "las moléculas se encuentran dentro de la mitad izquierda de la caja".

*Conducción de calor* "Todas las moléculas del sistema corresponden a la temperatura T"; es más débil que: "Todas las moléculas del cuerpo A, corresponden a la temperatura  $T_1$  y las moléculas del cuerpo B, corresponden a la temperatura  $T_2$ ". Se ha perdido parte del orden.

En la *Mecánica Estadística*, se da un significado preciso al desorden:

$$S = k \ln W$$

$k$  = constante de Boltzmann

$S$  = entropía del sistema

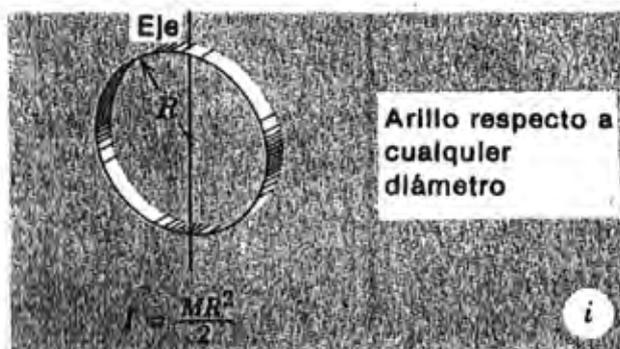
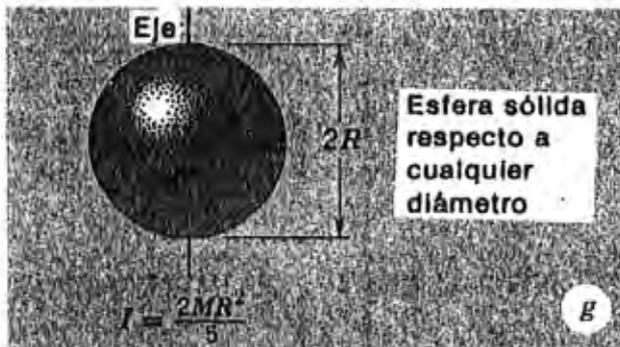
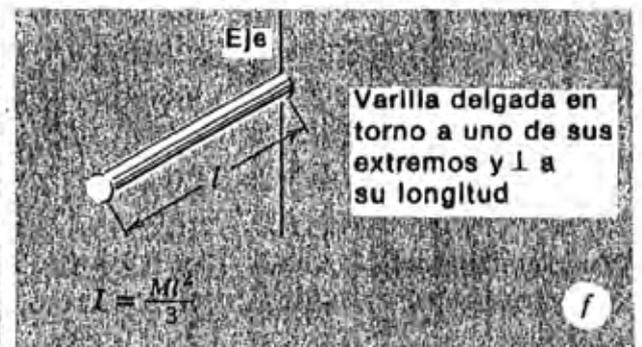
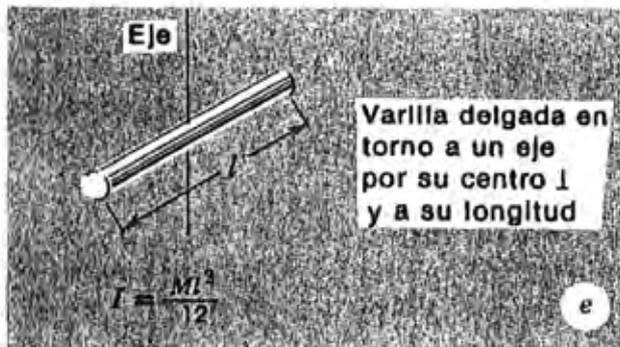
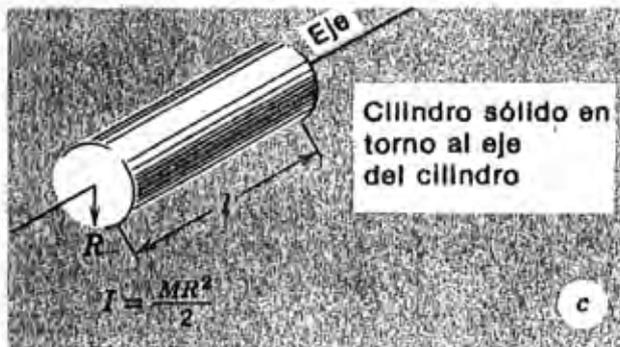
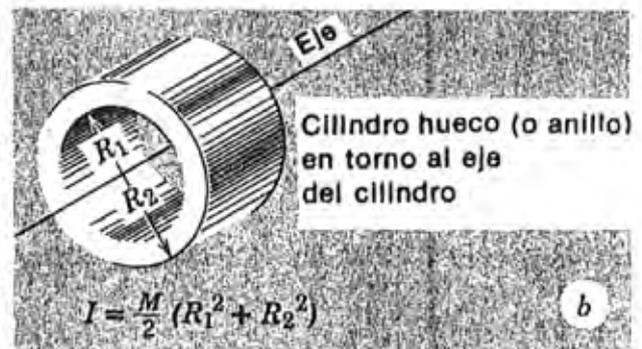
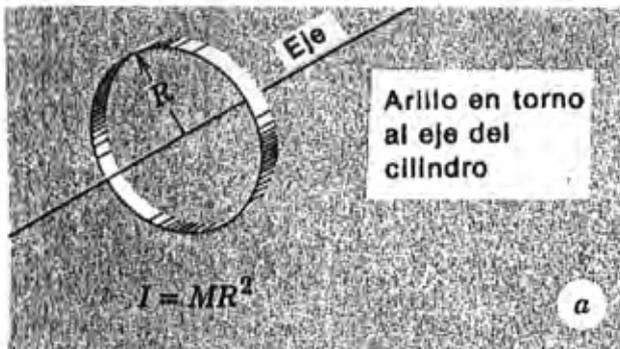
$W$  = *parámetro del desorden* (probabilidad)

La dirección en la que ocurren los procesos naturales (hacia valores mayores de la entropía) queda determinada por las *leyes de la probabilidad* (hacia el estado más probable).

El *estado de equilibrio*, termodinámicamente, es el estado de *entropía máxima*, y estadísticamente el *estado más probable*.

La Segunda Ley muestra el curso *más probable* de los eventos y no los únicos eventos posibles.

Sin embargo la *probabilidad* de que la naturaleza la contradiga es tan pequeña que es una de las leyes más generales y útiles de la Ciencia.



VALORES DE VD PARA AGUA A 15°C (VELOCIDAD EN M/SEG × DIAMETRO EN CM).

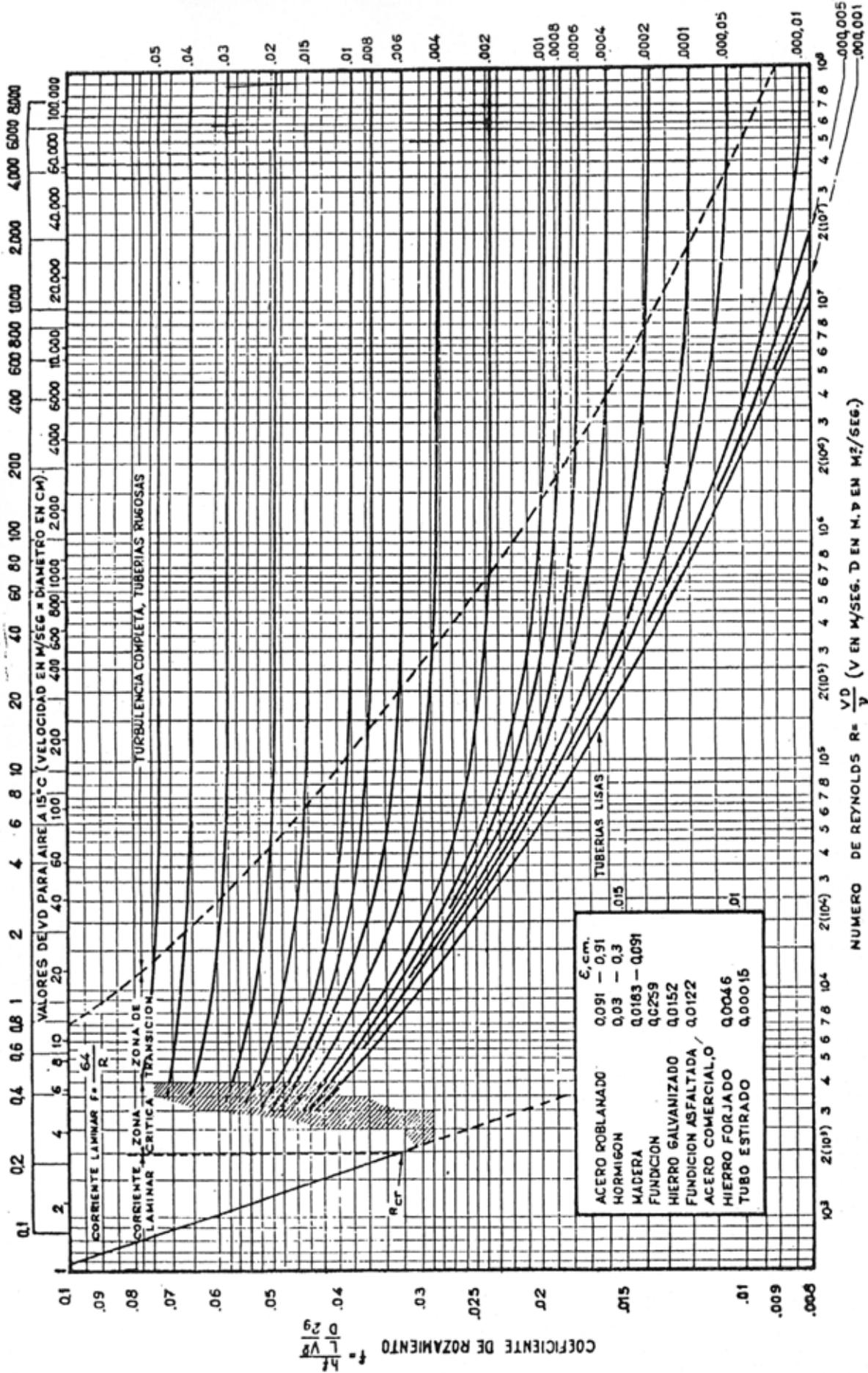
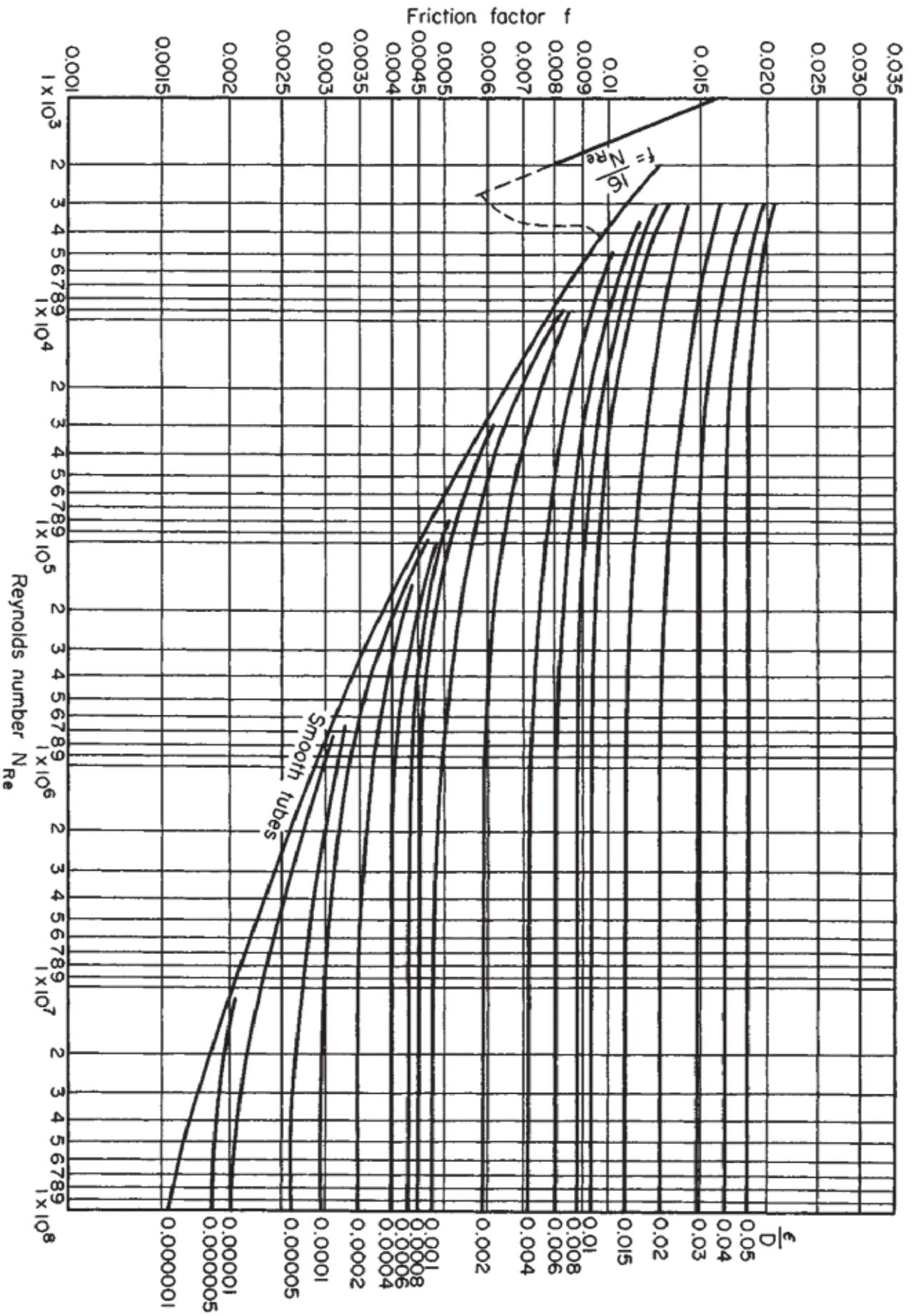


Fig. 5.32 Diagrama de Moody.



# TABLA 1

## (A) PROPIEDADES APROXIMADAS DE ALGUNOS GASES

Gas	Peso específico $w$ a 20° C, 1 Atm. kg/m <sup>3</sup>	Constante $R$ del gas m <sup>2</sup> /°K	Exponente adiabático $k$	Viscosidad cinemática $\nu$ a 20° C, 1 Atm. m <sup>2</sup> /seg
Aire	1,2047	29,3	1,40	$1,488 \times 10^{-5}$
Amoniaco	0,7177	49,2	1,32	1,535
Anhidrido carbónico	1,8359	19,2	1,30	0,846
Metano	0,6664	53,0	1,32	1,795
Nitrógeno	1,1631	30,3	1,40	1,590
Oxígeno	1,3297	26,6	1,40	1,590
Anhidrido sulfuroso	2,7154	13,0	1,26	0,521

## (B) ALGUNAS PROPIEDADES DEL AIRE A LA PRESION ATMOSFERICA

Temperatura °C	Densidad $\rho$ UTM/m <sup>3</sup>	Peso específico $w$ kg/m <sup>3</sup>	Viscosidad cinemática $\nu$ m <sup>2</sup> /seg	Viscosidad dinámica $\mu$ kg seg/m <sup>2</sup>
-20	0,1424	1,3955	$1,188 \times 10^{-5}$	$16,917 \times 10^{-7}$
-10	0,1370	1,3426	1,233	16,892
0	0,1319	1,2926	1,320	17,411
10	0,1273	1,2475	1,415	18,013
20	0,1229	1,2047	1,488	18,288
30	0,1188	1,1642	1,600	19,008
40	0,1150	1,1270	1,688	19,412
50	0,1115	1,0927	$1,769 \times 10^{-5}$	$19,724 \times 10^{-7}$

## (C) PROPIEDADES MECANICAS DEL AGUA A LA PRESION ATMOSFERICA

Temp. °C	Densidad UTM/m <sup>3</sup>	Peso específico kg/m <sup>3</sup>	Viscosidad dinámica kg seg/m <sup>2</sup>	Tensión superficial kg/m	Presión de vapor kg/cm <sup>2</sup> (ab)	Módulo de elasticidad volumétrico kg/cm <sup>2</sup>
0	101,96	999,87	$18,27 \times 10^{-5}$	0,00771	0,0056	20200
5	101,97	999,99	15,50	0,00764	0,0088	20900
10	101,95	999,73	13,34	0,00756	0,0120	21500
15	101,88	999,12	11,63	0,00751	0,0176	22000
20	101,79	998,23	10,25	0,00738	0,0239	22400
25	101,67	997,07	9,12	0,00735	0,0327	22800
30	101,53	995,68	8,17	0,00728	0,0439	23100
35	101,37	994,11	7,37	0,00718	0,0401	23200
40	101,18	992,25	6,69	0,00711	0,0780	23300
50	100,76	988,07	$5,60 \times 10^{-5}$	0,00693	0,1249	23400

## TABLA 2

### DENSIDAD RELATIVA Y VISCOSIDAD CINEMATICA DE ALGUNOS LIQUIDOS

(Viscosidad cinemática = valor de la tabla  $\times 10^{-6}$ )

Temp. °C	Agua**		Disolvente comercial		Tetracloruro de carbono		Aceite lubricante medio	
	Densid. relat.	Visc. cinem. m <sup>2</sup> /seg	Densid. relat.	Visc. cinem. m <sup>2</sup> /seg	Densid. relat.	Visc. cinem. m <sup>2</sup> /seg	Densid. relat.	Viscos. cinem. m <sup>2</sup> /seg
5	1,000	1,520	0,728	1,476	1,620	0,763	0,905	471
10	1,000	1,308	0,725	1,376	1,608	0,696	0,900	260
15	0,999	1,142	0,721	1,301	1,595	0,655	0,896	186
20	0,998	1,007	0,718	1,189	1,584	0,612	0,893	122
25	0,997	0,897	0,714	1,101	1,572	0,572	0,890	92
30	0,995	0,804	0,710	1,049	1,558	0,531	0,886	71
35	0,993	0,727	0,706	0,984	1,544	0,504	0,883	54,9
40	0,991	0,661	0,703	0,932	1,522	0,482	0,875	39,4
50	0,990	0,556					0,866	25,7
65	0,980	0,442					0,865	15,4

Temp. °C	Aceite a prueba de polvo*		Fuel-oil medio*		Fuel-oil pesado*		Gasolina*	
	Densid. relat.	Visc. cinem. m <sup>2</sup> /seg	Densid. relat.	Visc. cinem. m <sup>2</sup> /seg	Densid. relat.	Visc. cinem. m <sup>2</sup> /seg	Densid. relat.	Visc. cinem. m <sup>2</sup> /seg
5	0,917	72,9	0,865	6,01	0,918	400	0,737	0,749
10	0,913	52,4	0,861	5,16	0,915	290	0,733	0,710
15	0,910	39,0	0,857	4,47	0,912	201	0,729	0,683
20	0,906	29,7	0,855	3,94	0,909	156	0,725	0,648
25	0,903	23,1	0,852	3,44	0,906	118	0,721	0,625
30	0,900	18,5	0,849	3,11	0,904	89	0,717	0,595
35	0,897	15,2	0,846	2,77	0,901	67,9	0,713	0,570
40	0,893	12,9	0,842	2,39	0,898	52,8	0,709	0,545

#### Algunos otros líquidos

Líquido y temperatura	Densid. relat.	Visc. cinem. m <sup>2</sup> /seg
Turpentina a 20° C	0,862	1,73
Aceite de linaza a 30° C	0,925	35,9
Alcohol etílico a 20° C	0,789	1,54
Benceno a 20° C	0,879	0,745
Glicerina a 20° C	1,262	662
Aceite de castor a 20° C	0,960	1030
Aceite ligero de máq. a 16,5° C	0,907	137

\* Kessler y Lenz, Universidad de Wisconsin, Madison.

\*\* ASCE Manual 25.

## TABLA 3

### COEFICIENTES DE FRICCIÓN $f$ PARA AGUA SOLAMENTE

(Intervalo de temperatura aproximado de 10° C a 21° C)

Para tuberías viejas – intervalo aproximado de  $\epsilon$ : 0,12 cm a 0,60 cm

Para tuberías usadas – intervalo aproximado de  $\epsilon$ : 0,06 cm a 0,09 cm

Para tuberías nuevas – intervalo aproximado de  $\epsilon$ : 0,015 cm a 0,03 cm

$(f = \text{valor tabulado} \times 10^{-4})$

Diámetro y tipo de tubería		VELOCIDAD (m/seg)										
		0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,4	3,0	4,5	6,0	9,0
10 cm	Comercial vieja	435	415	410	405	400	395	395	390	385	375	370
	Comercial usada	355	320	310	300	290	285	280	270	260	250	250
	Tubería nueva	300	265	250	240	230	225	220	210	200	190	185
	Muy lisa	240	205	190	180	170	165	155	150	140	130	120
15 cm	Comercial vieja	425	410	405	400	395	395	390	385	380	375	365
	Comercial usada	335	310	300	285	280	275	265	260	250	240	235
	Tubería nueva	275	250	240	225	220	210	205	200	190	180	175
	Muy lisa	220	190	175	165	160	150	145	140	130	120	115
20 cm	Comercial vieja	420	405	400	395	390	385	380	375	370	365	360
	Comercial usada	320	300	285	280	270	265	260	250	240	235	225
	Tubería nueva	265	240	225	220	210	205	200	190	185	175	170
	Muy lisa	205	180	165	155	150	140	135	130	120	115	110
25 cm	Comercial vieja	415	405	400	395	390	385	380	375	370	365	360
	Comercial usada	315	295	280	270	265	260	255	245	240	230	225
	Tubería nueva	260	230	220	210	205	200	190	185	180	170	165
	Muy lisa	200	170	160	150	145	135	130	125	115	110	105
30 cm	Comercial vieja	415	400	395	395	390	385	380	375	365	360	355
	Comercial usada	310	285	275	265	260	255	250	240	235	225	220
	Tubería nueva	250	225	210	205	200	195	190	180	175	165	160
	Muy lisa	190	165	150	140	140	135	125	120	115	110	105
40 cm	Comercial vieja	405	395	390	385	380	375	370	365	360	350	350
	Comercial usada	300	280	265	260	255	250	240	235	225	215	210
	Tubería nueva	240	220	205	200	195	190	180	175	170	160	155
	Muy lisa	180	155	140	135	130	125	120	115	110	105	100
50 cm	Comercial vieja	400	395	390	385	380	375	370	365	360	350	350
	Comercial usada	290	275	265	255	250	245	235	230	220	215	205
	Tubería nueva	230	210	200	195	190	180	175	170	165	160	150
	Muy lisa	170	150	135	130	125	120	115	110	105	100	95
60 cm	Comercial vieja	400	395	385	380	375	370	365	360	355	350	345
	Comercial usada	285	265	255	250	245	240	230	225	220	210	200
	Tubería nueva	225	200	195	190	185	180	175	170	165	155	150
	Muy lisa	165	140	135	125	120	120	115	110	105	100	95
75 cm	Comercial vieja	400	385	380	375	370	365	360	355	350	350	345
	Comercial usada	280	255	250	245	240	230	225	220	210	205	200
	Tubería nueva	220	195	190	185	180	175	170	165	160	155	150
	Muy lisa	160	135	130	120	115	115	110	110	105	100	95
90 cm	Comercial vieja	395	385	375	370	365	360	355	355	350	345	340
	Comercial usada	275	255	245	240	235	230	225	220	210	200	195
	Tubería nueva	215	195	185	180	175	170	165	160	155	150	145
	Muy lisa	150	135	125	120	115	110	110	105	100	95	90
120 cm	Comercial vieja	395	385	370	365	360	355	350	350	345	340	335
	Comercial usada	265	250	240	230	225	220	215	210	200	195	190
	Tubería nueva	205	190	180	175	170	165	160	155	150	145	140
	Muy lisa	140	125	120	115	110	110	105	100	95	90	90

# TABLA 4

## PERDIDAS DE CARGA EN ACCESORIOS

(Subíndice 1 = aguas arriba y subíndice 2 = aguas abajo)

Accesorio	Pérdida de carga media
1. De depósito a tubería – conexión a ras de la pared (pérdida a la entrada)	$0,50 \frac{V_2^2}{2g}$
– tubería entrante	$1,00 \frac{V_2^2}{2g}$
– conexión abocinada	$0,05 \frac{V_2^2}{2g}$
2. De tubería a depósito (pérdida a la salida)	$1,00 \frac{V_1^2}{2g}$
3. Ensanchamiento brusco	$\frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$
4. Ensanchamiento gradual (véase Tabla 5)	$K \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$
5. Venturímetros, boquillas y orificios	$\left(\frac{1}{c_v^2} - 1\right) \frac{V_2^2}{2g}$
6. Contracción brusca (véase Tabla 5)	$K_c \frac{V_2^2}{2g}$
7. Codos, accesorios, válvulas*	$K \frac{V^2}{2g}$
Algunos valores corrientes de $K$ son:	
45°, codo .....	0,35 a 0,45
90°, codo .....	0,50 a 0,75
Tees .....	1,50 a 2,00
Válvulas de compuerta (abierta) .....	aprox. 0,25
Válvulas de control (abierta) .....	aprox. 3,0

## TABLA 5

### VALORES DE $K^*$ Contracciones y ensanchamientos

Contracción brusca		Ensanchamiento gradual para un ángulo total del cono						
$d_1/d_2$	$K_c$	4°	10°	15°	20°	30°	50°	60°
1,2	0,08	0,02	0,04	0,09	0,16	0,25	0,35	0,37
1,4	0,17	0,03	0,06	0,12	0,23	0,36	0,50	0,53
1,6	0,26	0,03	0,07	0,14	0,26	0,42	0,57	0,61
1,8	0,34	0,04	0,07	0,15	0,28	0,44	0,61	0,65
2,0	0,37	0,04	0,07	0,16	0,29	0,46	0,63	0,68
2,5	0,41	0,04	0,08	0,16	0,30	0,48	0,65	0,70
3,0	0,43	0,04	0,08	0,16	0,31	0,48	0,66	0,71
4,0	0,45	0,04	0,08	0,16	0,31	0,49	0,67	0,72
5,0	0,46	0,04	0,08	0,16	0,31	0,50	0,67	0,72

\* Valores tomados de King, *Handbook of Hydraulics*, McGraw-Hill Book Company.

## TABLA 6

### ALGUNOS VALORES DEL COEFICIENTE $C_1$ DE HAZEN-WILLIAMS

Tuberías rectas y muy lisas.....	140
Tuberías de fundición lisas y nuevas.....	130
Tuberías de fundición usadas y de acero roblonado nuevas.....	110
Tuberías de alcantarillado vitrificadas.....	110
Tuberías de fundición con algunos años de servicio.....	100
Tuberías de fundición en malas condiciones.....	80

## I OSCILACIONES

Movimiento Armónico Simple (M.A.S.)

$$F = -kx = ma$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 ; \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f$$

$$\begin{aligned} x &= A \sin(\omega t + \phi) ; & \phi &= \text{Arcsen}(x_0/A) \\ x &= A \cos(\omega t + \phi) ; & \phi &= \text{Arccos}(x_0/A) \\ v &= \omega A \cos(\omega t + \phi) & v_{\max} &= \omega A \end{aligned}$$

$$v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$a = -A \omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

$$a = -\omega^2 x \quad a_{\max} = -\omega^2 A$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$U = \frac{1}{2} kx^2 ; \quad K = \frac{1}{2} m v^2 ; \quad E = \frac{1}{2} k A^2$$

Péndulo Simple  $\theta \leq 15^\circ$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega \theta = 0 ; \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = 2\pi f$$

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$\Omega = \omega \theta_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$\alpha = -\omega^2 \theta_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Péndulo de Torsión

$$\tau = -k'\theta$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k'}}$$

$$I = I_{cm} + mh^2$$

Péndulo Físico  $\theta \leq 15^\circ$

$$\tau = -k'\theta = mgd \theta$$

$$k' = mgd$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k'}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Centro de Oscilación

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow L = \frac{I}{md}$$

Superposición de dos MAS: Igual dirección y frecuencia

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) \quad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

$$x = x_1 + x_2 = A \sin(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\delta}$$

$$\delta = \phi_2 - \phi_1$$

$$\tan \phi = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}$$

Superposición de dos MAS:

Direcciones Perpendiculares

$$\phi_x = 0 ; \quad \delta = \phi_y - \phi_x$$

$$x = A_x \sin(\omega t + \phi_x)$$

$$y = A_y \sin(\omega t + \phi_y)$$

Oscilaciones de dos Cuerpos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 ; \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

Osciladores Acoplados

$$k_e = k_1 + k_2 \quad (\text{Paralelo})$$

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (\text{Serie})$$

Movimiento Armónico Amortiguado

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = 2\pi f'$$

$$x = A e^{\left(\frac{-b}{2m}\right)t} \sin(\omega' t + \phi)$$

$$\tau = \frac{2m}{b}$$

$$A = A_0 e^{\left(\frac{-b}{2m}\right)t}$$

## II ELASTICIDAD

$$\text{Fatiga o Esfuerzo} = \frac{F}{A}$$

$$\text{Def. Unit.} = \frac{\Delta L}{L_0}$$

$$\text{Def. Unit. cizalladura } (\varphi) = \frac{\Delta x}{h}$$

$$\text{Def. Unit. Volumétrica} = \frac{\Delta V}{V_0}$$

$$\text{Módulo de Young} \quad Y = \frac{F/A}{\Delta L/L_0}$$

$$\text{Módulo de Rigidez} \quad S = \frac{F/A}{x/h}$$

$$\text{Módulo de Compresibilidad} \quad \beta' = -\frac{dP}{dV/V}$$

## III HIDROSTATICA

Densidad y Peso Especifico

$$\rho = \frac{m}{V} ; \quad \gamma = \frac{W}{V} \quad \gamma = \rho g$$

Densidad y Peso Especifico Relativos

$$\rho_R = \frac{\rho_s}{\rho_{H_2O}} ; \quad \gamma_R = \frac{\gamma_s}{\gamma_{H_2O}}$$

Presión Hidrostática

$$P = P_0 + \gamma h$$

Prensa Hidráulica

$$F = \frac{A}{a} f$$

Principio de Arquímedes

$$E = \text{peso del fluido desplazado}$$

$$E = \gamma V$$

Fuerzas Contra un Dique

$$F = \gamma L \frac{H^2}{2} \quad y = \frac{1}{3} H$$

$$M = \rho g L \frac{h^3}{6}$$

Tensión Superficial

$$\delta = \frac{F}{2L}$$

$$P - P_a = \frac{4\delta}{R}$$

## IV HIDRODINAMICA

Ecuación de la Continuidad

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{cte}$$

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 = \text{cte}$$

$$Q = Av = \frac{dV}{dt} ; \quad \dot{Q} = \rho Q = \frac{dm}{dt}$$

Ecuación de Bernoulli

$$\frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + Z = \text{cte}$$

Ecuación de Bernoulli Modificada

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 + H_B - H_T = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + Z_2 + h_{f_{1-2}}$$

Potencia de una Bomba

$$P = \frac{\gamma Q H_B}{75} [=] \text{ CV}$$

Pérdidas por Fricción y por Accesorios

$$h_f = f(LD) \left( \frac{v^2}{2g} \right) \quad h_f = k \left( \frac{v^2}{2g} \right)$$

Factor de Fricción

$$f = \frac{64}{Re} ; \quad Re < 2100$$

Número de Reynolds

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{VD}{\nu}$$

Ley de Poiseuille

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{P_1 - P_2}{L}$$

Ley de Stokes

$$F = 6 \pi \mu r v$$

### V TEMPERATURA Y DILATACIÓN

Temperatura como función de una propiedad Termométrica

$$T(X) = 273.16 \frac{X}{X_{Tr}}$$

Dilatación Lineal, Superficial y Cúbica

$$L = L_0(1 + \alpha \Delta T)$$

$$A = A_0(1 + 2\alpha \Delta T)$$

$$V = V_0(1 + \beta \Delta T); \quad \beta = 3\alpha$$

Ley de Enfriamiento de Newton

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-kT}$$

Fatigas de orden Térmico

$$F/A = \alpha Y \Delta T$$

### VI CANTIDAD DE CALOR

Calentamiento a Presión y a Volumen Cte

$$Q = m c_p \Delta T \quad Q = m c_v \Delta T$$

Calor Latente

$$Q = m \lambda$$

### VII TRANSFERENCIA DE CALOR

Ecuación de Fourier (Calor por Conducción)

$$q = -kA \frac{dT}{dX}$$

Flujo de Calor a través de Placas Planas

$$\frac{q}{A} = \frac{T_1 - T_n}{\sum (\Delta x / k)}$$

Flujo de Calor a través de Paredes Cilíndricas

$$\frac{q}{L} = \frac{T_1 - T_n}{\sum R_i} \quad R_i = \frac{\ln \left( \frac{r_{i+1}}{r_i} \right)}{2\pi k_i}$$

Flujo de Calor en una Esfera Hueca

$$q = 4\pi \frac{T_1 - T_n}{\sum R_i} \quad R_i = \frac{1}{k_i} \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right)$$

Conductividad Térmica Media

$$k_m = \frac{\int_{T_1}^{T_2} k dT}{T_2 - T_1}$$

Calor por Convección

$$q = hA (T_2 - T_1)$$

Ley de Stefan Boltzmann

$$W = \epsilon \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

### VIII TERMODINAMICA

Trabajo originado en cambios de Volumen

$$W = \int PdV$$

1ª Ley de la Termodinámica

$$\Delta U = Q - W$$

Ecuación de Estado de un Gas ideal

$$PV = n RT$$

Velocidad Molecular Promedio

$$v_{rcm} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Calores Específicos de un Gas ideal

$$R = C_p - C_v$$

Variación de Energía Interna de un Gas ideal

$$dU = n C_v dT$$

Compresión o Expansión Adiabática de un Gas ideal

$$TV^{(\gamma-1)} = cte$$

$$PV^\gamma = cte$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

$$\gamma = 1.67 \text{ gas monoatómico}$$

$$\gamma = 1.40 \text{ gas diatómico}$$

$$\gamma = 1.33 \text{ gas poliatómico}$$

Motor Térmico

$$\eta = \frac{W_{NETO}}{Q_{absorbido}} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Refrigerador

$$\eta = \frac{Q_2}{Q_2 - Q_1} = \frac{T_2}{T_2 - T_1}$$

### I. CONSTANTES, FACTORES DE CONVERSIÓN Y PROPIEDADES DE ALGUNAS SUBSTANCIAS.

$$R = 1.987 \text{ cal/mol}^\circ\text{C} = 0.082057 \text{ (atm l)/(mol}^\circ\text{C)}$$

$$\sigma = 4.878 E - 8 \text{ Kcal/(h m}^2 \text{ K}^4)$$

$$1 \text{ atm} = 1.01335 \text{ Pa} = 1.033 \text{ Kg/cm}^2 = 760 \text{ mmHg} = 14.7 \text{ lbf/pulg}^2$$

$$1 \text{ BTU} = 252 \text{ cal}$$

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$$

$$1^\circ\text{R} = 1.8 \text{ K}$$

$$Y_{Acero} = 20 E 3 \text{ Kg/mm}^2$$

$$\alpha_{Acero} = 12 E - 6 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

$$k_{Acero} = 39 \text{ Kcal/(h m }^\circ\text{C)}$$

$$\rho_{Aire} = 1.2047 \text{ Kg/m}^3 \text{ (a } 20^\circ\text{C y } 1 \text{ Atm)}$$

$$\rho_{H2O} = 1 \text{ g/cm}^3 = 1 \text{ Kg/l} = 1000 \text{ Kg/m}^3$$

$$\gamma_{H2O} = 1000 \text{ Kg/m}^3$$

$$C_{p\text{agua}} = 1 \text{ cal/g}^\circ\text{C} = 1 \text{ BTU/lbm}^\circ\text{F} = 1 \text{ Kcal/Kg}^\circ\text{C}$$

$$C_{p\text{hielo}} = 0.52 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$$

$$C_{p\text{vapor}} = 0.45 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$$

$$\lambda_{Hielo} = 80 \text{ cal/g}$$

$$\lambda_{Vapor} = 539 \text{ cal/g}$$

$$\text{sen}(x+y) = \text{sen}x \text{cos}y + \text{sen}y \text{cos}x$$

$$\text{cos}(x+y) = \text{cos}x \text{cos}y - \text{sen}x \text{sen}y$$