Lic. CPA Freddy A. Camargo

- *Licenciado en Contaduría Pública*
- *Diplomado en Investigación y Formación Tutorial CEPI*
- *Diplomado en la Enseñanza de la Matemática en la Educación Superior*
- *Diplomado en Análisis Financiero*
- *Certificado en Normas Internacionales de Auditoria (NIA)*
- *Certificado en Normas Internacionales de Información Financiera (NIIF)*
- *Certificado en Normas de Contabilidad Generalmente Aceptadas en Bolivia (NCGA)*

Freddy Camargo

Freddy A. Camargo

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

APUNTES - PARTE 1

LIC. CPA FREDDY A. CAMARGO CHAMBI

ANÁLISIS MATEMATICO I

APUNTES - PARTE 1

Freddy A. Camargo Chambi

2022

Título de la Obra

Análisis Matemático I, apuntes - parte 1

Primera Edición
Año de Publicación: **2022**

La Paz - Bolivia

AGRADECIMIENTO

A "Dios" nuestro creador

A mi querida familia

Y a las personas que día a día se esfuerzan por ser personas de provecho y por colaborar para que Bolivia tenga un futuro mejor.

Presentación

Análisis Matemático I, Apuntes – Parte 1, es un libro para los estudiantes de la Facultad de Contaduría Pública y Ciencias Financieras, Carrera de Contaduría Pública para la Materia de Matemáticas (MAT 100). Se trata de un material pensando en los estudiantes de primer año de la carrera.

El estudiante encontrará en la presente obra una guía de ejercicio que le permitirá resolver cada ejercicio de la forma más sencilla y accesible, sin perder lógicamente los márgenes de cientificidad y profundidad, que un trabajo de esta índole requiere; entonces, les corresponderá a los lectores juzgar en qué medida se alcanzó este objetivo

Me queda, Agradecer al más grande matemático y calculador del universo, de quien sus obras combinan: razón, belleza, armonía y perfección, estoy hablando del creador “Dios” que mediante el, logremos descifrar los secretos del universo.

La Paz – Bolivia, marzo de 2022

Lic. CPA Freddy A. Camargo Chambi

Experiencia del autor en la enseñanza

Freddy Alejandro Camargo Chambi ha culminado sus estudios en Contaduría Pública de la prestigiosa Facultad de Ciencias Económicas y Financieras de la UMSA (La Paz, Bolivia).

Se ha desempeñado como auxiliar de Docencia (Previo examen de competencia) en la ***Facultad de Ciencias Económicas y Financieras UMSA, de:***

- *GABINETE DE AUDITORIA FINANCIERA*
- *CONTABILIDAD INTERNACIONAL (2 Gestiones Consecutivas)*
- *CONTABILIDAD INTERMEDIA*
- *CONTABILIDAD BÁSICA*
- *CÁLCULO I (2 Gestiones Consecutivas)*

Se ha desempeñado como auxiliar de Docencia (Previo examen de competencia) en la ***Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales USFX, de:***

- *ANÁLISIS MATEMATICO I (2 Gestiones Consecutivas)*
- *ESTADISTICA I (2 Gestiones Consecutivas)*

Como instructor en la Academia Newton*:*

- *MATEMÁTICA PREUNIVERSITARIA*
- *INTRODUCCIÓN A LA CONTABILIDAD*

Como instructor en la Academia La Paz

- *CÁLCULO I*
- *MATEMATICA FINANCIERA*
- *ESTADISTICA I y II*

Índice

DESIGUALDADES E INECUACIONES

1.-Desigualdades

Es la relación que establece que dos cantidades tienen diferentes valores.

Los signos que se utilizan para designar desigualdades son:

$>$ *se lee*: "mayor que"

$<$ *se lee*: "*menor que*"

$\geq$ *se lee*: "*mayor o igual que*"

$\leq$ *se lee*: "*menor o igual que*"

1.2.- Clases de Desigualdades

1.2.1. Desigualdades Absolutas

Son aquellas que se verifican para cualquier valor o sistemas de valores, dado a sus letras.

$$(x+2)^2 + 12 > 0$$

Por simple inspección deducimos que el conjunto solución es todos $\mathbb{R}$

1.2.2. Desigualdad relativa o inecuaciones

Son aquellas que se verifican para determinar dos valores o sistemas de valores, asignados a sus letras.

$$3x - 7 > 14$$

Solo se satisface para $x > 7$

1.3.- Conjunto solución

Es aquel conjunto que agrupa a todas las soluciones particulares (si existen) de una inecuación. Si la inecuación no posee solución, entonces será un conjunto vacío.

1.4.- Resolver una inecuación

Consiste en hallar su conjunto solución. La resolución se realiza aplicando pasos que más adelante detallaremos.

1.4.1 Teoremas que nos ayudan a resolver inecuaciones

$$ab > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

$$ab < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$$

$$\frac{a}{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

$$\frac{a}{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$$

Ejemplo 1

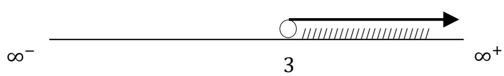
$$6x - 4 > 2x + 8$$

$6x - 2x > 4 + 8$

$4x > 4 + 8$

$4x > 12$

$x > 3$



El conjunto solución es : $x \in \ ]3, \infty[$

Ejemplo 2

$$3(x - 4) + 4x < 7x + 2$$

$$3x - 12 + 4x - 7x - 2 < 0$$

$$-12 + 7x - 7x - 2 < 0$$

$$-14 < 0$$

Esta desigualdad obtenida es cierta, entonces la solución de la inecuación dad, es el conjunto de todos los números reales

$(x \in \mathbb{R})$.

Ejemplo 3

$$4x^2 + 9x + 9 < 0$$

Por simple inspección vemos que cualquier valor de x la expresión será positivo por lo tanto la solución de la inecuación será conjunto vacío $(\emptyset)$

Ejemplo 4

$$4x^2 - 4x + 7 > 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4(4)(7)$

$\Delta = 16 - 112$

$\Delta = -96$

El discriminante de la inecuación es negativa por lo tanto el conjunto solución será todos los reales $(x \in \mathbb{R})$

1.5.- Aplicaciones de las inecuaciones a la administración y Economía

Ejercicio 1

Determine el costo mínimo C (en bolivianos) dado que:

$$2(1{,}5C + 80) \leq 2(2{,}5C - 20)$$

Solución:

$2(1{,}5C + 80) \leq 2(2{,}5C - 20)$

$1{,}5C + 80 \leq 2{,}5C - 20$

$1{,}5C - 2{,}5C \leq -20 - 80$

$1{,}5C - 2{,}5C \leq -20 - 80$

$-C \leq -100 \quad (-1)$

$$C \geq 100$$

El costo mínimo para la compañía será de al menos Bs 100.

Ejercicio 2

Determine la ganancia máxima P (bolivianos) dado que:

$$12(2P - 320) \leq 4(3P + 240)$$

Solución:

$(2P - 320) \leq \dfrac{4}{12}(3P + 240)$

$$2P - 320 \leq \frac{1}{3}(3P + 240)$$

$$2P - 320 \leq \frac{1}{3} \cdot 3P + \frac{1}{3} \cdot 240$$

$$2P - 320 \leq P + 80$$

$$2P - P \leq 80 + 320$$

$$P \leq 400$$

La ganancia máxima que podrá obtener la compañía es de Bs 400.

Ejercicio 3

La compañía Davis fabrica un producto que tiene un precio unitario de venta de Bs 20 y un costo unitario de Bs 15. Si los costos fijos son de Bs 600, determine el número mínimo de unidades que deben ser vendidos para que la compañía tenga utilidades.

Solución:

Sea x : unidades
Precio unitario = 15
Costos fijos = 600

Para que la compañía obtenga al menos utilidad debe cumplirse la siguiente condición.

$$Ingreso\ Total - Costo\ Total \geq 0$$

$$P \cdot x - (Costos\ fijos + Costos\ variables) \geq 0$$

$$20x - (15x + 600) \geq 0$$

$$20x - 15x - 600 \geq 0$$

$$5x \geq 600$$

$$x \geq 120$$

Para que la compañía obtenga utilidades debe vender al menos 120 unidades

Ejercicio 4

El Administrador de una fábrica debe decidir si deberán producir sus propios empaques, que la empresa ha estado adquiriendo de proveedores externos a Bs 1,10 cada uno. La fabricación de los empaques incrementará los costos generales de la empresa en Bs 800 al mes y el costo del material y de mano de obra será de Bs 0,60 por cada empaque ¿Cuántos empaques deberá usar la empresa al mes para justificar la decisión de fabricar sus propios empaques?

Solución:

1 paso *Analizar lo que me pide el Ejercicio*

Me pide que justifiquemos la decisión de fabricar nuestros propios empaques versus comprarlos de proveedores externos.

2 Paso *traducir las condiciones del Ejercicio en términos matemáticos*

Sea x : Cantidad de empaque

$$Costo\ de\ fabricar\ < Costo\ de\ adquirirlo$$

- ***Costo de fabricarlos*** = *Costos Variables + Costos Fijos*

Costo de fabricarlos = (Costo del material y de mano de obra) + (Costos generales)

Costo de fabricarlos $= 0{,}60\,x\ +\ 800$

- ***Costo de adquirirlos*** = $1{,}10\,x$

$$0{,}60\,x\ +\ 800 < 1{,}10\,x$$

$$0{,}60\,x - \ 1{,}10\,x\ < -800$$

$$-\,0{,}50\,x\ < -800 \qquad (-1)$$

$$0{,}50\,x\ > 800$$

$$x\ > \frac{800}{0{,}50}$$

$$x\ > 1600$$

El administrador de la compañía para justificar la decisión de fabricar sus propios empaques debe fabricar de al menos 1601.

Ejercicio 5

Una mujer de negocio quiere determinar la diferencia entre los costos de comprar y rentar un automóvil. Ella puede rentar un automóvil por Bs 400 mensual (con una base anual), bajo este plan el costo por milla (gasolina y aceite) es de Bs 0,10. Si comprase el carro, el gasto fijo anual seria de Bs 3000 más Bs 0,18 por milla ¿Cuál es el menor número de millas que deberá conducir por año para que la renta no sea más cara que la compra?

Solución:

1 paso *Analizar lo que me pide el Ejercicio*

Me pide que encuentre el número de millas que debe conducir por año para justificar que la renta no sea más cara que la compra

2 Paso *traducir las condiciones del Ejercicio en términos matemáticos*

Sea x *: Numero de millas*

$$Costo\ de\ rentar\ el\ auto\ < Costo\ de\ comprar\ el\ auto$$

- **Costo de rentar el auto** $= 400\ (mes)\ + 0{,}10\ x$

Costo de rentar el auto $=\ 4800\ (Año)\ + 0{,}10\ x$

- Costo de comprar el auto

Costo de comprar el auto $=\ 3000(Año)\ +\ 0{,}18\ x$

$$Costo\ de\ rentar\ el\ auto\ < Costo\ de\ comprar\ el\ auto$$

$$4800\ (Año)\ + 0{,}10\ x\ < 3000(Año)\ +\ 0{,}18\ x$$

$$4800\ \ + 0{,}10\ x\ < 3000\ +\ 0{,}18\ x$$

$$-\ 0{,}18\ x\ + 0{,}10\ x\ < 3000 -\ 4800$$

$$-\ 0{,}08x\ <\ 1800\quad (-1)$$

$$0{,}08x\ >\ 1800$$

$$x\ >\ \frac{1800}{0{,}08}$$

$$x\ >\ 22500$$

La mujer de negocio para justificar su decisión de rentar el automóvil versus comprar el automóvil debe recorrer al menos 22501 millas al año.

Ejercicio 6

Un fabricante puede vender todas las unidades que produce al precio de Bs 30 cada una. Tiene costos fijos de Bs 12000 al mes;

además, le cuesta Bs 22 producir un artículo ¿Cuántas unidades debe producir y vender al mes la compañía para obtener utilidades?

Solución:

Sea x : unidades debe producir y vender (mes)
Precio unitario = 30
Costos fijos = 12000
Costo variable=22

Para que la compañía obtenga al menos utilidad debe cumplirse la siguiente condición.

$$Ingreso\ Total - Costo\ Total > 0$$

$$(P \cdot x) - (Costos\ fijos + Costos\ variables) > 0$$

$$(30 \cdot x) - (12000 + 22x) > 0$$

$$30 \cdot x - 12000 - 22x > 0$$

$$8x > 12000$$

$$x > \frac{12000}{8}$$

$$x > 1500$$

El fabricante debe producir al menos 1501 artículos para obtener utilidades.

Ejercicio 7

La comisión mensual de un agente de ventas es de 15% de las ventas por arriba de Bs 12000. Si su objetivo es lograr una comisión de al menos Bs 3000 por mes ¿Cuál es el volumen mínimo de ventas que debe alcanzar?

Solución:

1 paso *Analizar lo que me pide el Ejercicio*

Calcular el Volumen mínimo de ventas que debe alcanzar para logras ganar al menos 3000 Bs al mes.

2 Paso *traducir las condiciones del Ejercicio en términos matemáticos*

Sea x :Volumen mínimo de Ventas

Comisión =$(x-12000)\cdot 15\%$

$$Comision\ del\ agente \geq 3000$$

$$(x-12000)\cdot 15\% \geq 3000$$

$$(x-12000) \geq \frac{3000}{0{,}15}$$

$$x-12000 \geq 20000$$

$$x \geq 20000+12000$$

$$x \geq 32000$$

El volumen de ventas que debe alcanzar el agente es de al menos de 32000 Bs para así obtener una comisión de Bs 3000.

Ejercicio 8

El costo unitario de publicidad de una revista es de Bs 0,65. Se vende al distribuidor en Bs 0,60 cada una y la cantidad que recibe por publicidad es el 10% de la recibida por todas las revistas vendidas arriba de las 10000. Encuentre el menor números de revistas que pueden ser publicadas sin perdida, esto es , que la utilidad ≥ 0 (suponga que toda la emisión será vendida).

Solución:

1 paso *Analizar lo que me pide el Ejercicio*

Encontrar el menor número de revistas que pueden ser publicada sin perdida.

2 Paso *traducir las condiciones del Ejercicio en términos matemáticos*

Sea x *: número de revistas*

Ingreso por distribución $=0{,}60\ x$

Ingreso por publicidad $=0{,}60(x-10000)\cdot 10\%$

Costo unitario$=0.65\ x$

$$Ingreso\ por\ distribucion + Ingreso\ por\ publicidad - Costo\ Total \geq 0$$

$$0,60\,x + 0,60(x - 10000) \cdot 10\% - 0.65\,x \geq 0$$

$$0,60\,x + 0,06x - 600 - 0.65\,x \geq 0$$

$$0.01\,x \geq 600$$

$$x \geq 60000$$

El número de revista que debe venderse es de al menos 60000 unidades para obtener utilidad.

Ejercicio 9

Una empresa automotriz desea saber si le conviene fabricar sus propias correas para el ventilador, que ha estado adquiriendo de proveedores externos a Bs 2,50 cada unidad. La fabricación de las correas por la empresa incrementara sus costos fijos en Bs 1500 al mes, pero solo le costara Bs 1,70 fabricar cada correa.

¿Cuántas correas debe utilizar la empresa cada mes para justificar la fabricación de sus propias correas?

Solución:

1 paso *Analizar lo que me pide el Ejercicio*

Me pide que calcule cuantas correas debo fabricar para justificar que es mejor fabricarlas que comprarlas.

2 Paso *traducir las condiciones del Ejercicio en términos matemáticos*

Sea x : Numero de correas

$$Costo\ de\ fabricarlo\ < Costo\ de\ comprar$$

$\boldsymbol{Costo\ de\ fabricar} = Costos\ fijos + Costos\ variables$

Costo de fabricar = $1500\ +\ 1{,}70\ x$

Costo de Comprar $=\ 2{,}50\ x$

$$15000\ +\ 1{,}70\ x\ < 2{,}50\ x$$

$$-2{,}50\ x\ +\ 1{,}70\ x\ < -1500$$

$$-0{,}8\ x\ < -1500\ \ (-1)$$

$$0{,}8\ x\ > 1500$$

$$x\ > 1875$$

La empresa para justificar la decisión de fabricar sus correas debe producir al menos 1876 unidades.

Ejercicio 10

Una Compañía invierte Bs 30000 de sus fondos excedentes a dos tasas de interés anual: 5 y 6,75%. Desea una ganancia anual que no sea menor al 6,50% ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que debe invertir a la tasa de 6,75 por ciento?

Solución:

1 paso *Analizar lo que me pide el Ejercicio*

La menor cantidad de dinero que debe invertir a la tasa 6,75%

2 Paso *traducir las condiciones del Ejercicio en términos matemáticos*

Sea x : La menor cantidad a la tasa 6,75%

$$x + y = 30000$$

Ganancia anual= $30000\ al\ 6{,}50\% \ = \ 30000 \cdot 6{,}50\% \ = 1950$

$$inversion\ al\ 5\% + inversion\ al\ 6{,}75\% \geq 1950$$

$$y \cdot 5\% + x \cdot 6{,}75\% \geq 1950$$

$$(30000 - x)\ \cdot 5\% + x\ \cdot 6{,}75\% \geq 1950$$

$$1500 - 0{,}05 \cdot x + 0{,}0675 \cdot x \geq 1950$$

$$0{,}0175x \geq 450$$

$$x \geq 25714{,}29$$

La menor cantidad que la compañía debe invertir a la tasa 6,75% es de 25714,29.

Ejercicio 11

El costo de publicar cada ejemplar de la revista semanal compra y venta es de Bs 0,35. Los ingresos del representante de ventas son de Bs 0,30 por ejemplar y los ingresos de la publicidad corresponden al 20% de los ingresos obtenidos por ventas que exceden los 2000 ejemplares ¿Cuántas copias deberá publicar y vender cada semana para obtener ingresos semanales de al menos Bs 1000?

Solución:

Sea x *: número de revistas a publicar y vender*

Ingreso por representante $=0{,}30\ x$

Ingreso por publicidad $=0{,}30(x-2000)\cdot 20\%$

Costo unitario$=0{,}35\ x$

$$Ingreso\ por\ distribucion + Ingreso\ por\ publicidad - Costo\ Total \geq 1000$$

$$0{,}30\ x + 0{,}30(x-2000)\cdot 20\% - 0{,}35\ x \geq 1000$$

$$0{,}30\ x + 0{,}06x - 120 - 0{,}35\ x \geq 1000$$

$$0{,}01x \geq 1000 + 120$$

$$0{,}01x \geq 1120$$

$$x \geq \frac{1120}{0{,}01}$$

$$x \geq 112000$$

La compañía debe publicar y vender al menos 112000 revistas semanales para obtener una utilidad de al menos Bs 1000.

Ejercicio 12

Un fabricante tiene 2500 unidades de un producto cuyo precio unitario es de Bs 4. El próximo mes el precio por unidad se incrementará en Bs 0,50. El fabricante quiere que el ingreso total recibido por la venta de las 25000 unidades no sea menor que Bs 10750 ¿Cuál es número máximo de unidades que puede ser vendido este mes?

Solución:

	Mes	Mes Próximo
Precio	4	(4+0,50)
Cantidad	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$

$$x + y = 2500$$

$$y = 2500 - x \;\; \ldots\ldots \; (1)$$

Condición del Ejercicio

$$Venta\ mes \ + \ Venta\ próximo\ mes \ \geq \ 10750$$

$$P_1 \cdot x \ + \ P_2 \cdot y \ \geq \ 10750$$

$$4 \cdot x \ + \ 4{,}50 \cdot y \ \geq \ 10750$$

de (1)

$$4 \cdot x \ + \ 4{,}50 \cdot (2500 - x) \ \geq \ 10750$$

$$4 \cdot x \ + \ 11250 - 4{,}50x \ \geq \ 10750$$

$$-0{,}50x \ \geq \ 10750 - 11250$$

$$-0{,}50x \ \geq \ -500 \quad (-1)$$

$$x \ \leq 1000$$

El número máximo que puede vender este mes es de 1000 unidades

Ejercicio 13

Un Peluquero atiende en promedio a 120 clientes a la semana cobrándoles Bs 4 por corte por cada incremento de Bs 0,50 en el precio, el peluquero pierde 8 clientes. ¿Qué precio máximo deberá fijar para obtener ingresos semanales por lo menos Bs 520?

Solución:

Sea x: el número de veces que incrementa el precio por encima de 4

Promedio clientes = 120

Cobra = 4

Lo que quiero cobrar = Bs $(4 + 0{,}50x)$

Número de clientes con el incremento =$(100 - 10x)$

$$Ingreso\ total\ a\ la\ semana\ =\ precio\ *\ cantidad$$

Ingreso total =$(4 + 0{,}50x) \cdot (120 - 8x)$

Condición del Ejercicio

$$Ingreso\ total \geq 520$$

$$(4 + 0{,}50x) \cdot (120 - 8x) \geq 520$$

$$480 + 60x - 32x - 4x^2 - 520 \geq 0$$

$$-4x^2 + 28x - 40 \geq 0 \;\; \textit{(-1)}$$

$$4x^2 - 28x + 40 \leq 0 \;\; \textit{(1/4)}$$

$$x^2 - 7x + 10 \leq 0$$

$$(x - 5) \cdot (x - 2) \leq 0$$

El máximo precio que puede subir el peluquero es de $(4 + 0{,}50 \cdot 5) = 6{,}50$ *para obtener una utilidad de al menos Bs 520.*

1.6.-Ejercicios propuestos de aplicación de las inecuaciones a las Ciencias Económicas y Financieras.

Ejercicio 1

Un accionista invierte Bs 100 a un interés anual de R por ciento y otros Bs 100 al 2R por ciento anual. Si el Valor de las dos inversiones deber ser de al menos Bs 224,80 después de 2 años ¿Qué restricciones deben establecerse sobre R?

Ejercicio 2

Para producir 1 unidad de un producto nuevo, una compañía determina que el costo del material es de Bs 2,50 y el de mano de obra de Bs 4. El gasto general, sin importar el volumen de ventas, es de Bs 5000. Si el precio para un mayorista es de Bs 7,40 por unidad, determine el número mínimo de unidades que debe ser vendido para que la compañía obtenga utilidades.

Ejercicio 3

Un editor puede vender 12000 ejemplares de un libro al precio de Bs 25 cada uno, por cada boliviano de incremento en el precio, las ventas bajan en 400 ejemplares ¿Qué precio mínimo deberá fijarse a cada ejemplar con objetivo de lograr ingresar por lo menos de Bs 300000?

Ejercicio 4

Una fabricante de camisetas produce N camisetas a un costo de mano de obra total de Bs 1,2N y un costo total por material de Bs 0,30N. Los gastos generales para la planta son Bs 6000. Si cada camiseta se vende en Bs 3 ¿Cuántas camisetas deben venderse para que la compañía obtenga utilidades?

Ejercicio 5

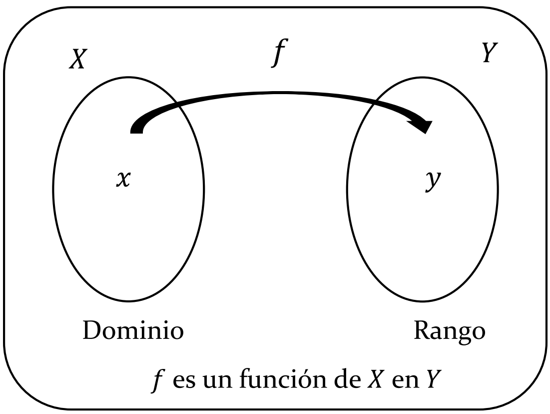
Suponga que los consumidores compraran q unidades de un producto al precio de $\frac{100}{q}+1$ Bolivianos por unidad ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe ser vendido para que el ingreso por ventas sea mayor que Bs 5000?

2.-Funciones

Una función $\boldsymbol{f}$ es una relación entre dos conjuntos, un conjunto de partida x, llamado dominio y otro de llegada y , llamando rango, que se define por una ley o regla de correspondencia que asigna a cada elemento $x \in X$ un único elemento $y \in Y$.

Simbólicamente

$f: X \rightarrow Y \Leftrightarrow \forall\, x \in X\ \exists\, y \in Y / (x, y) \in f$



“No existe dos pares con el mismo primer componente”

Si:$(x, y) \in f$ decimos que y es la imagen de x

$\boldsymbol{y = f_{(x)}}$ (notación funcional)

El Dominio, la función debe estar expresada en la forma explicita

El Rango, se debe despejar la variable independiente

Se debe evitar:

a) La división entre cero

b) Raíz de índice par y radicando negativo
c) Logaritmos de números negativos o cero

2.1.-Aplicaciones de las funciones en las ciencias económicas y Empresariales

La función en términos económicos ase referencia:

Los **modelos matemáticos** son utilizados para analizar la relación entre dos o más variables. Pueden ser utilizados para entender fenómenos naturales, sociales, físicos, etc. Dependiendo del objetivo buscado y del diseño del mismo modelo pueden servir para predecir el valor de las variables en el futuro, hacer hipótesis, evaluar los efectos de una determinada política o actividad, entre otros objetivos.

Aunque parezca un concepto teórico, en realidad hay muchos aspectos de la vida cotidiana regidos por modelos matemáticos.

Observemos las siguientes expresiones:

a) Un empresario desea conocer la relación entre la ganancia de su compañía y su nivel de producción
b) Una empresa desea conocer si es más factible alquilar una maquinaria y comprar la maquinaria
c) Un empresario desea saber el precio máximo que puede ofrecer su producto sin perder el margen de ganancia que posee.

Para poder responder estas interrogantes el primer paso será responder la pregunta ¿Cómo depende una cantidad de otra?

Esta dependencia entre dos cantidades se describe convenientemente en matemáticas mediante una función; por lo tanto, una función es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento de un conjunto A un solo elemento de un conjunto B

2.2.-Funciones de Costos, Ingresos y Ganancia

Función Costo

Dentro la estructura de una empresa al producir un producto, se tiene dos tipos costos, los costos fijos y los costos variables

Costos fijos: Son aquellos que siempre deberás pagar, independiente del nivel de producción de tu negocio o emprendimiento. Ejemplos:

1) Impuestos inmobiliarios.
2) Servicios públicos (luz, gas, agua).
3) Alquiler de los inmuebles (oficinas, depósitos).
4) Seguros.
5) Materiales de oficina.
6) Servicio de internet.
7) Mano de obra indirecta.
8) Personal de vigilancia.
9) Gastos de administración.
10) Transporte.
11) Tributos (licencias, tasas municipales).

Costos variables: Son aquellos costos que varían de acuerdo con la producción que se desarrolla en una empresa. Ejemplos:

1) Materia prima directa.
2) Insumos directos.
3) Materiales generales.
4) Comisiones sobre ventas.
5) Envases y embalajes.
6) Combustible y recursos energéticos.
7) Costos de distribución.

$$Costo\ total\ =\ Costos\ Variables\ +\ Costos\ Fijos$$

Función Ingreso

El ingreso que resulta de una o más transacciones comerciales es el pago total recibido, y a veces se la llama ingreso bruto. Ingreso total es el ingreso por vender x artículos al precio de p cada uno.

$$Ingreso\ total\ =\ Precio\ \cdot Cantidad$$

Función Ganancia (Utilidad)

La **ganancia** es el ingreso *neto*, o lo que queda de los ingresos después de restar los costos.

$$G_{(x)} = IT_{(x)} - C_{(x)}$$

Ejercicio 1

Suponga que la venta esperada (en miles de bolivianos) de una pequeña compañía para los próximos diez años esta aproximada por la función $f_{(x)} = 0{,}08x^4 - 0{,}04x^3 + x^2 + 9x + 50$

a) ¿Cuál es la venta esperada este año?
b) ¿Cuál será la venta en tres años?

Solución:

Venta esperada este año

$x = 1$

$f_{(x)} = 0{,}08x^4 - 0{,}04x^3 + x^2 + 9x + 50$

$f_{(1)} = 0{,}08 \cdot 1^4 - 0{,}04 \cdot 1^3 + 1^2 + 9 \cdot 1 + 50$

$$f_{(1)} = 60{,}40$$

Las ventas esperadas por este año es de Bs 60400

Venta esperada en tres años

$x = 3$

$f_{(x)} = 0{,}08x^4 - 0{,}04x^3 + x^2 + 9x + 50$

$f_{(3)} = 0{,}08 \cdot 3^4 - 0{,}04 \cdot 3^3 + 3^2 + 9 \cdot 3 + 50$

$$f_{(3)} = 91{,}40$$

Las ventas esperadas por el 3 año es de Bs 91400.

Ejercicio 2

Una contratista estima que el costo total de construir x grupos de departamentos en un año esta aproximado por $f_{(x)} = x^2 + 80x + 60$, donde $f_{(x)}$ representa el costo en cientos de miles de bolivianos. Encuentre el costo de construir.

a) 4 grupos
b) 10 grupos

Solución:

El costo de construir 4 grupos

$x = 4$

$f_{(x)} = x^2 + 80x + 60$

$f_{(4)} = 4^2 + 80 \cdot 4 + 60$

$f_{(4)} = 396$

El costo de construir 4 grupos de departamentos es de Bs 39 600 000

El costo de construir 10 grupos

$x = 10$

$f_{(x)} = x^2 + 80x + 60$

$f_{(10)} = 10^2 + 80 \cdot 10 + 60$

$f_{(4)} = 960$

El costo de construir 10 grupos de departamentos es de Bs 96 000 000

Ejercicio 3

En cierto estado, el impuesto T sobre la cantidad de artículos es de 6% sobre el valor de los artículos adquiridos "x", donde T y x se miden en bolivianos.

a) Exprese T como función de x
b) Determine $T_{(200)}$ y $T_{(5,65)}$

Solución:

La expresión matemática que expresa la condición del Ejercicio será
Sea x : número de artículos adquiridos
$T \rightarrow x$

$$T_{(x)} = 0{,}06 \cdot x$$

Sea $T = 200$

$$T_{(12)} = 0{,}06 \cdot 200$$

$$T_{(12)} = 12$$

El impuesto que tendría que pagar por 200 artículos es de Bs 12

Sea $T = 800$

$$T_{(800)} = 0{,}06 \cdot 800$$

$$T_{(800)} = 48$$

El impuesto que tendría que pagar por 800 artículos es de Bs 48

Ejercicio 4

Según las fuentes de la industria el ingreso correspondiente a la industria de ventas a domicilio durante los años posteriores a su introducción se puede aproximar mediante la función

$R_{(x)} = \begin{cases} -0{,}03x^3 + 0{,}25x^2 - 0{,}12x & si\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0{,}57x - 0{,}63 & si\ 3 < x \leq 11 \end{cases}$ donde $R_{(x)}$

mide el ingreso de miles de millones de bolivianos y $\boldsymbol{t}$ se mide en años $t = 0$ correspondiente al inicio de 1984 ¿cuál fue el ingreso al inicio de 1984 y 1993?

Solución:

El ingreso en 1984

$Sea\ x = 1$

$$R_{(x)} = \begin{cases} -0{,}03x^3 + 0{,}25x^2 - 0{,}12x & si\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0{,}57x - 0{,}63 & si\ 3 < x \leq 11 \end{cases}$$

El valor de x corresponde a la primera condición entonces

$$R_{(x)} = -0{,}03x^3 + 0{,}25x^2 - 0{,}12x \quad si\ 0 \leq x \leq 3$$

$$R_{(1)} = -0{,}03 \cdot 1^3 + 0{,}25 \cdot 1^2 - 0{,}12 \cdot 1$$

$$R_{(1)} = 0{,}1$$

El ingreso correspondiente el año de 1984 haciende a la suma 0,10 mil millones

El ingreso en 1993

$Sea\ x = 9$

El valor de x corresponde a la segunda condición entonces

$R_{(x)} = 0{,}57x - 0{,}63 \qquad si\ 3 < x \le 11$

$R_{(1)} = 0{,}57 \cdot 9 - 0{,}63 = 4{,}5$

El ingreso correspondiente el año de 1993 haciende a la suma 4,5 mil millones.

Ejercicio 5

filtro bol, fabricante de filtros para agua tiene un costo fijo por Bs 20000, costos de producción de Bs 20 por unidad y un precio de venta unitario de Bs 30 determinar las funciones de costos ingresos y ganancias por filtro bol.

Solución:

La función de costo

$$C_{(x)} = CV + CF$$

$$C_{(x)} = c_u \cdot x + CF$$

$$C_{(x)} = 20 \cdot x + 20000$$

La función de Ingreso

$$IT_{(x)} = P \cdot x$$

$$IT_{(x)} = 30 \cdot x$$

La función ganancia

$$G(x) = IT_{(x)} - C_{(x)}$$

$$G(x) = 30 \cdot x - (20 \cdot x + 20000)$$

$$G(x) = 10x - 20000$$

Ejercicio 6

La electricidad se cobra los consumidores a una tarifa de Bs 10 por unidad para las primeras 50 unidades y a Bs 3 por unidad para cantidades que exceden las 50 unidades. Determinar la función $C_{(x)}$ que da el costo de usar x unidades de electricidad.

Solución:

1 condición

Sea x*: número de unidades de electricidad*

Tarifa = 10 Bs

$10x$

2 condición

Tarifa = 3 Bs

$3(x - 50)$

$3x - 150$

$$C_{(x)} = \begin{cases} 10x & si \quad x \leq 50 \\ 3(x - 50) & si \quad x > 50 \end{cases}$$

Ejercicio 7

Una empresa que fabrica radiorreceptores tienen costos fijos de Bs 3000 y el costo de la mano de obra y del material es de Bs 15 por radio. Determine la función de costo, el costo total como una función del número de radios producidos si cada radio receptor se vende por Bs 25, encuentre la función de costo, ingresos y de utilidad.

Solución:

Costo fijo = 3000

Costo de mano obra y del material = 15

Precio = Bs 25

La función de costo

$$C_{(x)} = CV + CF$$

$$C_{(x)} = c_u \cdot x + CF$$

$$C_{(x)} = 15x + 3000$$

La función de Ingreso

$$IT_{(x)} = P \cdot x$$

$$IT_{(x)} = 25 \cdot x$$

La función utilidad

$$U(x) = IT_{(x)} - C_{(x)}$$

$$U(x) = 25x - (15x + 3000)$$

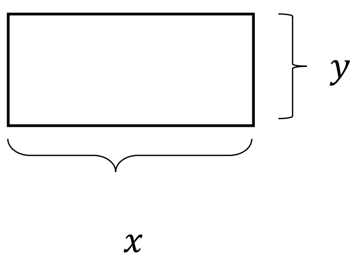
$$U(x) = 25x - 15x - 3000$$

$$U(x) = 10x - 3000$$

Ejercicio 8

Un granjero tiene 200 yardas de cerca para delimitar un terreno rectangular exprese el área del terreno con una función de la longitud de uno de sus lados.

Solución:



200 yardas de cerca

$P = 2a + 2b$ $\qquad$ $P = 2x + 2y$

$P = 2(x + y)$ $\qquad$ $200 = 2(x + y)$

$100 = x + y$ $\qquad$ $y = 100 - x$

$A = f(x)$

$A = a \cdot b$

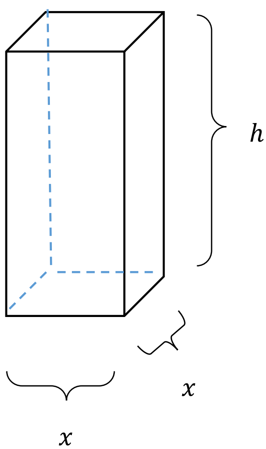
$A = x \cdot y$

$$A = x \cdot (100 - x)$$

Ejercicio 9

Se construye una cisterna de modo que su capacidad sea de 300 pies cúbicos de agua, la cisterna tiene como base un cuadrado y cuatro lados verticales todas hechas de concreto y una tapa cuadrada de acero. Si el concreto con tiene un costo de Bs 1,50 por pie cuadrado y el acero cuesta Bs 4 por pie cuadrado, determine el costo total C como una función de la longitud del lado de la base cuadrada.

Solución:



$$Volumen = xxh = x^2h$$

$$300 = x^2h$$

$$\frac{300}{x^2} = h$$

$$C_{(x)} = precio \cdot base + precio \cdot lados + precio \cdot tapa$$

$$C_{(x)} = 1{,}50x^2 + 1{,}50 \cdot 4xh + 4x^2$$

$$C_{(x)} = 1{,}50x^2 + 1{,}50 \cdot 4x\frac{300}{x^2} + 4x^2$$

$$C_{(x)} = 5{,}5x^2 + 1{,}50 \cdot 4\frac{300}{x}$$

$$C_{(x)} = 5{,}5x^2 + \frac{1800}{x}$$

Ejercicio 10

un fabricante tiene gastos fijos mensuales de Bs 40.000 y un costo unitario de producción de Bs 8. El producto se vende a Bs 12 la unidad.

a) ¿cuál es la función de costó
b) ¿cuál es la función de ingreso?
c) ¿Cuál es la función de ganancia?
d) ¿Calculé la ganancia o pérdida correspondiente a niveles de producción de 8000 a 12000 unidades?

Solución:

La función de costo

$$C_{(x)} = CV + CF$$

$$C_{(x)} = 8x + 40000$$

La función de Ingreso

$$IT_{(x)} = P \cdot x$$

$$IT_{(x)} = 12x$$

La función ganancia

$$G(x) = IT_{(x)} - C_{(x)}$$

$$G(x) = 12x - (8x + 40000)$$

$$G(x) = 4x - 40000$$

$x = 8000$

$G(8000) = 4 \cdot 8000 - 40000 = -8000$

$x = 12000$

$$G(12000) = 4 \cdot 12000 - 40000 = 8000$$

Ejercicio 11

Encuentra el punto de equilibrio por la empresa con función de costó
$C_{(x)} = 5x + 1000$ y función de ingreso $IT_{(x)} = 15x$.

Solución:

$$Punto\ equilibrio \quad C_{(x)} = IT_{(x)}$$

$$5x + 1000 = 15x$$

$$-10x = -1000 \ \ (-1)$$

$$x = 100$$

$$P_e(100{,}1500)$$

El punto de equilibrio para que la empresa no gane ni pierda es de 100 unidades.

Ejercicio 12

encuentra el punto de equilibrio para la empresa con función de costó $C_{(x)} = 0{,}2x + 120$ y función ingreso $IT_{(x)} = 0{,}4x$

Solución:

$$\textit{Punto equilibrio} \quad C_{(x)} = IT_{(x)}$$

$$0{,}2x + 120 = 0{,}4x$$

$$0{,}2x - 0{,}4x = -120 \quad (\text{-}1)$$

$$x = 600$$

$$P_e(600{,}240)$$

El punto de equilibrio para que la empresa no gane ni pierda es de 600 unidades.

Ejercicio 13

encuentre el punto de equilibrio para la empresa como función de costó $C_{(x)} = 150x + 2000$ y función de ingreso $IT_{(x)} = 200x$.

Solución:

Punto equilibrio $\qquad C_{(x)} = IT_{(x)}$

$$150x + 2000 = 200x$$

$$150x - 200x = -2000$$

$$-50x = -2000 \quad (\text{-}1)$$

$$x = 40$$

$$P_e(40{,}8000)$$

El punto de equilibrio para que la empresa no gane ni pierda es de 40 unidades.

2.3.-Aplicación de las funciones a las Ciencias Económicas y Financieras

Ejercicio 1

El azúcar tiene un costo de Bs 25 para cantidades hasta 50 libras y de Bs 20 por libras en el caso de cantidades por encima de las 50 libras. Si $C_{(x)}$ denota el costo de x libras de azúcar, exprese $C_{(x)}$ por medio de expresiones algebraicas apropiadas.

Ejercicio 2

Auto time fabricante de cronómetros tiene gastos fijos mensuales de Bs 48000 y un costo unitario de producción de Bs 8. Los cronómetros se venden a Bs14 cada uno.

a) ¿Cuál es la función de costó?
b) ¿Cuál es la función de ingreso?
c) ¿Cuál es la función de ganancia?
d) ¿Calcula la ganancia o pérdida correspondiente a niveles de producción de 6000 y 10000 cronómetro respectivamente?

Ejercicio 3

Suponga que la ventas de una guitarra eléctrica satisface la relación
$H_{(x)} = 300x + 2000$,donde $H_{(x)}$ representa el número de guitarras vendidas en el año x ,con $x = 0$ correspondiente al año 1987 .Encuentre las ventas en cada uno de los siguientes años.

a) 1987
b) 1990
c) 1991

Ejercicio 4

La demanda mensual, x , de cierto artículo al precio de P bolivianos por unidad está dada por la relación $x = 1350 - 45p$ el costo de la mano de obra y del material con que se fabrica este producto es de Bs 5 por unidad y el costo fijo es son de Bs 2000 al mes ¿Qué precio por unidad P deberá al consumidor con objeto de obtener una utilidad máxima mensual?

Ejercicio 5

El ingreso mensual por concepto de la venta de x unidades de cierto artículo está dado por $I_{(x)} = 12x - 0{,}01x^2$ bolivianos .Determine el número de unidades que deben venderse cada mes con el propósito de maximizar el ingreso ¿Cuál es el correspondiente ingreso máximo?

Ejercicio 6

Una empresa tiene un costo fijo mensual de Bs 2000 y el costo variable por unidad de su producto es de Bs 25.

a) ¿Determine la función de costó?
b) El ingreso I obtenido por vender x unidades estado por $I_{(x)} = 60x - 0{,}01x^2$ determina el número de unidades que deben venderse al mes de modo que maximiza el ingreso, ¿Cuál es este ingreso máximo,
c) ¿Cuántas unidades tiene producirse y venderse al mes con el propósito de obtener una utilidad máxima, ¿cuál es la utilidad máxima?

Ejercicio 7

El ingreso mensual R obtenido por vender zapatos modelo de lujo es en función de la demanda x del mercado .Obsérvese que ,como una función del precio P por par, el ingreso mensual y la demanda son

$I_{(p)} = 300p - 0{,}01p^2$ y $x = 300 - 2p$ ¿Cómo depende $I_{(p)}$ de x?

Ejercicio 8

El número "y" unidades vendidas cada semana de cierto producto depende de la cantidad de x (en bolivianos) gastado en publicidad y está dado por $y = 70 + 150x - 0{,}3x^2$.¿Cuánto deberían gastar a la semana en publicidad con el objeto de obtener volumen de venta máximos? ¿Cuál es este volumen de ventas máximo?

Ejercicio 9

Los costos fijos semanales de una empresa por sus productos son de Bs 200 y el costo variable por unidad es de Bs 0,70. La empresa puede vender x unidades a un precio de "p" por unidad en donde

Ejercicio 10

Urubú, un complejo habitacional tiene, 100 departamentos de dos recámaras. La ganancia mensual obtenida por la renta x departamentos está dado $P_{(x)} = -10x^2 + 1760x - 50000$, bolivianos

a) ¿Cuántas unidades deben rentarse para maximizar la ganancia mensual?

Ejercicio 11

La ganancia mensual estimada obtenida por la empresa Canon al producir y vender x unidades de cámaras modelo M1 es

$U_{(x)} = -0{,}04x^2 + 240x - 10000$, bolivianos. Encuentre cuántas cámaras debe producirse cada mes para maximizar sus ganancias

Ejercicio 12

La relación entre las ganancias trimestrales de ECOBOL , $P_{(X)}$,y la cantidad de dinero x invertido en publicidad por trimestre queda descrita mediante la función

$P_{(x)} = -\frac{1}{8}x^2 + 7x + 30 \quad (0 \leq x \leq 50)$,donde , $P_{(X)}$,y x se mide en miles de bolivianos. Determine la cantidad de dinero que debe invertir la compañía en publicidad por trimestre para maximizar sus ganancias trimestrales.

Ejercicio 13

El ingreso mensual I (en cientos de bolivianos) obtenido por la venta de rasuradoras electrónica Royal se relaciona con el precio unitario P (en bolivianos) mediante la ecuación $I_{(x)} = -\frac{P^2}{2} + 30p$

¿Cuál es el precio unitario que maximiza el ingreso mensual?

3.-Limites

3.1 Definición de Limite

Sea $f_{(x)}$ la función definida sobre algún intervalo abierto que contiene el número a, excepto posiblemente en "**a**" misma. Entonces, decimos que el límite de $f_{(x)}$ cuando x tiene **a** es L, y lo expresamos como.

$$\lim_{x \to a} f_{(x)} = L$$

Si para cada número $\varepsilon > 0$ Existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{Si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces } \left|f_{(x)} - L\right| < \varepsilon$$

¿Qué significa $\lim f_{(x)} = L$?

*Significa que los valores de $f_{(x)}$ pueden hacerse tan cercanos a **L** como queramos, tomando x lo suficientemente cerca de **a** (pero no igual a).*

Teorema

El límite de $f_{(x)}$ existe y es único, cuando x tiende al valor de **a**, si y solo si existen los limites laterales y además son iguales.

$$\lim_{x\to a} f_{(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to a^-} f_{(x)} = \lim_{x\to a^+} f_{(x)} = L$$

Operaciones conocidas

$\infty + \infty = \infty$	$\frac{\infty}{a} = \infty$
$\infty \cdot \infty = \infty$	$\infty^a = \infty$
$\infty^\infty = \infty$	$a^\infty = \infty \quad (a > 1)$
$\infty + a = \infty$	$a^\infty = 0 \quad (a < 1)$
$\infty - a = \infty$	$\frac{\infty}{0} = \infty$
$\infty \cdot a = \infty$	$\frac{0}{\infty} = 0$
$\frac{a}{\infty} = 0$	$0^\infty = 0$
$\frac{0}{\infty} = 0$	
$0^\infty = 0$	

$$a \cdot 0 = 0$$
$$\frac{0}{a} = 0$$
$$\frac{a}{0} = \infty$$
$$0^a = 0$$
$$a^0 = 1$$

$$\ln 0 = -\infty$$
$$\ln 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$
$$\log \infty = \infty$$
$$\sin 0 = 0$$
$$\cos 0 = 1$$
$$\tan 0 = 0$$

Indeterminaciones

Son operaciones de resultados no conocidos, que adoptan un valor independiente de la función que les dio origen.

$$\frac{0}{0} = ?$$
$$\frac{\infty}{\infty} = ?$$
$$0 \cdot \infty = ?$$
$$\infty^0 = ?$$
$$\infty - \infty = ?$$
$$1^\infty = ?$$
$$0^0 = ?$$

Al resolver ejercicios de límites, se reemplazará la variable por el valor al que tiende, cuando veamos que la función presenta ***indeterminación****, esta debe ser levantada aplicando los diferentes métodos para su resolución.*

Propiedad de los limites

1	$\lim_{x \to a} k = k \quad donde: \quad k = constante$
2	$\lim_{x \to a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \to a} f(x)$
3	$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f_{(x)} \pm \lim_{x \to a} g(x)$
4	$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
5	$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g_{(x)}} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g_{(x)}} = \frac{L}{M}; \;\; M \neq 0$
6	$\lim_{x \to a} \frac{k}{f(x)} = \frac{k}{\lim_{x \to a} f(x)} = \frac{k}{m}; \;\; M \neq 0$
7	$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n = \mathrm{L}^n \;\; ; \; n \in \mathbb{Z}^+$
8	$\lim_{x \to a} \ln[f(x)] = \ln\left[\lim_{x \to a} f(x)\right] = \ln L \;\; ; L > 0$

1. $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(2+3x)-1}{x}}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+0)(1+2\cdot 0)(2+3\cdot 0)-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Factorizamos el numerador

$$(1+x)(1+2x)(2+3x) = (1+3x+2x^2)(1+3x)$$

$$1+3x+2x^2+3x+9x^2+6x^3$$

$$1+6x+11x^2+6x^3$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+6x+11x^2+6x^3-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(6+11x+6x^2)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(2+3x)-1}{x} = 6$$

$$\boldsymbol{2.\text{-}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+0)^5-(1+0\cdot 1)}{0^2+0^5}=\frac{0}{0}$$

Factorizamos el numerador

$$(1+x)^5=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1-(1+5x)}{x^2+x^5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1-1-5x}{x^2+x^5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5+5x^4+10x^3+10x^2}{x^2+x^5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^3+5x^2+10x+10)}{x^2(1+x^3)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+5x^2+10x+10}{1+x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{0^3+5\cdot 0^2+10\cdot 0+10}{1+0^3}=10$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}=10$$

3.- $\boldsymbol{\lim_{x\to 2}\left(\frac{2}{3x-6}-\frac{2}{2x^2-5x+2}\right)}$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2}{3\cdot 2-6}-\frac{2}{2\cdot 2^2-5\cdot 2+2}\right)=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-10x+4-6x+12}{(2x^2-5x+2)(3x-6)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-16x+16}{(2x^2-5x+2)\cdot(3x-6)}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{4(x-2)^2}{(2x^2-5x+2)\cdot(3x-6)}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{4(x-2)^2}{(2x-1)(x-2)(3x-6)}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{4(x-2)^2}{(2x-1)(x-2)3(x-2)}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{4(x-2)^2}{3(2x-1)(x-2)^2}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{4}{3(2x-1)}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{4}{3(2\cdot 2-1)} = \frac{4}{3(3)} = \frac{4}{9}$$

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{2}{3x-6} - \frac{2}{2x^2-5x+2}\right) = \frac{4}{9}$$

4.- $\boldsymbol{\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1^{100}-2\cdot 1+1}{1^{50}-2\cdot 1+1}=\frac{2-2}{2-2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1-1+1}{x^{50}-2x+1-1+1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-1-2x+2}{x^{50}-1-2x+2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{(x^{100}-1)-2(x-1)}{x-1}}{\dfrac{(x^{90}-2)-2(x-1)}{x-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{x^{100}-1}{x-1}-2}{\dfrac{x^{50}-1}{x-1}-2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^{99}+x^{98}+x^{97}+\cdots x+1)-2}{(x^{49}+x^{48}+x^{47}+\cdots x+1)-2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1^{99}+1^{98}+1^{97}+\cdots 1+1)-2}{(1^{49}+1^{48}+1^{47}+\cdots 1+1)-2}=\frac{98}{48}=\frac{49}{24}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}=\frac{49}{24}$$

5.- $\boldsymbol{\lim\limits_{X\to 1}\frac{x^{m}-1}{x^{n}-1}}$ $\boldsymbol{m,n}\in\mathbb{Z}^{+}$

$$\lim_{X\to 1}\frac{1^{\mathrm{m}}-1}{1^{n}-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{X\to 1}\frac{x^{\mathrm{m}}-1}{x^{n}-1}=\lim_{X\to 1}\frac{\frac{x^{\mathrm{m}}-1}{x-1}}{\frac{x^{\mathrm{m}}-1}{x-1}}$$

$$=\lim_{X\to 1}\frac{(x^{m-1}+x^{\mathrm{m}-2}+x^{\mathrm{m}-3}+\cdots+1)}{(x^{n-1}+x^{\mathrm{n}-2}+x^{\mathrm{n}-3}+\cdots+1)}$$

$$\lim_{X\to 1}\frac{(1^{m-1}+1^{\mathrm{m}-2}+1^{\mathrm{m}-3}+\cdots+1)}{(1^{n-1}+1^{\mathrm{n}-2}+1^{\mathrm{n}-3}+\cdots+1)}=\frac{m}{n}$$

$$\lim_{X\to 1}\frac{x^{\mathrm{m}}-1}{x^{n}-1}=\frac{m}{n}$$

6.- $\boldsymbol{\lim_{x\to 1}\frac{x^{2m}-1}{x^{2}-1}}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1^{2m}-1}{1^{2}-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2m}-1}{x^{2}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{2m}-1}{(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2m}-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{2m}-1}{(x-1)}\cdot\frac{1}{(x+1)}$$

$$\lim_{x\to 1}(x^{2m-1}+x^{2\mathrm{m}-2}+x^{2\mathrm{m}-3}+\cdots+1)\cdot\frac{1}{(x+1)}$$

$$\lim_{x\to 1}(1^{2m-1}+1^{2\mathrm{m}-2}+1^{2\mathrm{m}-3}+\cdots+1)\cdot\frac{1}{(1+1)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2m}{2}=m$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2m}-1}{x^2-1}=m$$

7.- $\boldsymbol{\lim_{x\to 1}\frac{x^{14}+x^2-2}{x^{12}+4x^8+x^2-6}}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1^{14}+1^2-2}{1^{12}+4\cdot 1^8+1^2-6}=\frac{0}{0}$$

Cambio de Variable sea:

$$F=x^2 \qquad x\to 1\ \Rightarrow u\to 1$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2)^7+x^2-2}{(x^2)^6+4(x^2)^4+x^2-6}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(F)^7 + \mathrm{F} - 2}{(F)^6 + 4(F)^4 + F - 6}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{F^7 - 1 + \mathrm{F} - 1}{(F)^6 - 1 + 4(F)^4 - 4 + F - 1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\mathrm{F} - 1)(F^6 + F^5 + F^4 + F^3 + F^2 + F + 1) + (\mathrm{F} - 1)}{F^6 - 1 + 4F^4 - 4 + F - 1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\mathrm{F} - 1)(F^6 + F^5 + F^4 + F^3 + F^2 + F + 1) + (\mathrm{F} - 1)}{(\mathrm{F} - 1)(F^5 + F^4 + F^3 + F^2 + F + 1) + 4(F^4 - 1) + (F - 1)}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{F^6 + F^5 + F^4 + F^3 + F^2 + F + 1 + 1}{F^5 + F^4 + F^3 + F^2 + F + 1 + 4F^3 + 4F^2 + 4F + 4 + 1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1^6 + 1^5 + 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1 + 1 + 1}{1^5 + 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1 + 1 + 4 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 4 + 1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{14} + x^2 - 2}{x^{12} + 4x^8 + x^2 - 6} = \frac{8}{23}$$

$$\mathbf{8.}\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^n-3^n}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+0)^n-3^n}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^n+\frac{n}{1!}\cdot 3^{n-1}\cdot x\,\frac{+11(n-1)}{2!}x^2+\cdots x^n-3^n}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{n}{1!}3^{n-1}x+\frac{\mathrm{n}(n-1)}{2!}x^2+\cdots x^n}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\frac{n}{1!}3^{n-1}+\frac{\mathrm{n}(n-1)}{2!}x+\cdots x^{n-1}\right)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{n}{1!}3^{n-1}+\frac{\mathrm{n}(n-1)}{2!}x+\cdots x^{n-1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{n}{1!} 3^{n-1} + \frac{\mathrm{n}(n-1)}{2!} \cdot 0 + \cdots + 0^{n-1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{n}{1!} 3^{n-1} = n3^{n-1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(3+x)^n - 3^n}{x} = n3^{n-1}$$

9.- $\boldsymbol{\lim_{x \to 1} \frac{(3x+5)^2 - 64}{x^2 + x - 2}}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(3(1)+5)^2 - 64}{(1)^2 + (1) - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{9x^2 + 30x + 25 - 64}{x^2 + x - 2}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{9x^2 + 30x - 39}{x^2 + x - 2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3(3x^2+10x-13)}{(x+2)(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3(3x+13)(x-1)}{(x+2)(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3(3x+13)}{(x+2)}=\frac{3(3\cdot 1+13)}{(1+2)}=\frac{3(16)}{3}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(3x+5)^2-64}{x^2+x-2}=16$$

10.- $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{(x+3)(x+2)-(x+1)(x+6)}{(x+2)(x+4)-(x+1)(x+8)}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(0+3)(0+2)-(0+1)(0+6)}{(0+2)(0+4)-(0+1)(0+8)}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+5x+6)-(x^2+7x+6)}{(x^2+6x+8)-(x^2+9x+8)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 5x + 6 - x^2 - 7x - 6}{x^2 + 6x + 8 - x^2 - 9x - 8}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x - 7x}{6x - 9x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-12x}{-3x} = 4$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x + 3)(x + 2) - (x + 1)(x + 6)}{(x + 2)(x + 4) - (x + 1)(x + 8)} = 4$$

11.- $\boldsymbol{\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \left(\frac{x+1}{2x^2-3-2} + \frac{x}{2x^2+7x+3}\right)}$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{x + 1}{(2x + 1)(x - 2)} + \frac{x}{(x + 3)(2x + 1)}$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{-\frac{1}{2}+1}{\left(2\cdot-\frac{1}{2}+1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}+\frac{-\frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{2}+3\right)\left(2\cdot-\frac{1}{2}+1\right)}$$

$$=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{x+1}{(2x+1)(x-2)}+\frac{x}{(x+3)(2x+1)}$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{(x+1)(x+3)+x(2x+1)(x-2)}{(2x+1)(x-2)(x+3)}$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{x^2+4x+3-x^2+2x}{(2x+1)(x-2)(x+3)}$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{6x+3}{(2x+1)(x-2)(x+3)}$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{3(2x+1)}{(2x+1)(x-2)(x+3)}$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{3}{(x-2)(x+3)}=\frac{3}{\left(-\frac{1}{2}-2\right)\left(-\frac{1}{2}+3\right)}$$

$$=\frac{3}{\left(-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}}=-\frac{3}{\frac{25}{4}}=-\frac{12}{25}$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\left(\frac{x+1}{2x^2-3-2}+\frac{x}{2x^2+7x+3}\right)=-\frac{12}{25}$$

12.- $\boldsymbol{\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n-na^{n-1}(x-a)}{(x-1)^2}}$

$$\lim_{x\to a}\frac{a^n-a^n-na^{n-1}(a-a)}{(a-1)^2}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{0-na^{n-1}(0)}{(a-1)^2}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{0}{(a-1)^2}=0$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n-na^{n-1}(x-a)}{(x-1)^2}=0$$

$$\textbf{13.-}\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3^2-2\cdot 3+6}-\sqrt{3^2+2\cdot 3-6}}{3^2-4\cdot 3+3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$$

$$\cdot\frac{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}^{2}-\sqrt{x^2+2x-6}^{2}}{x^2-4x+3}$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+6-(x^2+2x-6)}{x^2-4x+3}$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+6-x^2-2x+6}{x^2-4x+3}$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{-2x+6-2x+6}{x^2-4x+3}$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{-4x+12}{x^2-4x+3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{-4(x-3)}{x^2-4x+3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{-4(x-3)}{(x-3)(x-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{-4}{(x-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{-4}{(3-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{3^2-2\cdot 3+6}+\sqrt{3^2+2\cdot 3-6}}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{-4}{(2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{3^2-2\cdot 3+6}+\sqrt{3^2+2\cdot 3-6}}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{-4}{(2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{3^2}+\sqrt{3^2}}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}=-\frac{1}{3}$$

14.- $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+0}-1}{\sqrt[3]{1+0}-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}+1^2}{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}+1^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}^2-1^2}{\sqrt[3]{1+x}^3-1^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}+1^2}{1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + x - 1^2}{1 + x - 1^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x} + 1}$$

$$\cdot \frac{\left(\sqrt[3]{1 + x}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + x} + 1^2}{1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x} + 1} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{1 + x}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + x} + 1^2}{1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1 + x} + 1} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{1 + x}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + x} + 1^2}{1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{1 + x}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + x} + 1^2}{\sqrt{1 + x} + 1}$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{1 + 0}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + 0} + 1^2}{\sqrt{1 + 0} + 1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1^2+\sqrt[3]{1}+1^2}{\sqrt{1}+1}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\frac{3}{2}$$

15.- $\boldsymbol{\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}}$

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{8}-2}{8-8}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}^{2}+2\sqrt[3]{x}+2^2}{\sqrt[3]{x}^{2}+2\sqrt[3]{x}+2^2}$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}^{3}-2^3}{x-8}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}^{2}+2\sqrt[3]{x}+2^2}$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{x-8}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}^{2}+2\sqrt[3]{x}+2^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{8}^{2}+2\sqrt[3]{8}+2^2}$$

$$\lim_{x\to 8} \frac{1}{\sqrt[3]{8}^2 + 2\sqrt[3]{8} + 2^2} = \frac{1}{2^2 + 2 \cdot 2 + 2^2}$$

$$\lim_{x\to 8} \frac{1}{2^2 + 2 \cdot 2 + 2^2} = \frac{1}{12}$$

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} = \frac{1}{12}$$

16.- $\boldsymbol{\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+13}}{x-1}}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{4 \cdot 1 + 5} - \sqrt{3 \cdot 1 + 13}}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1) + (\sqrt{4x + 5} - 3) - (\sqrt{3x + 13} - 4)}{x - 1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} + \frac{\sqrt{4x + 5} - 3}{x - 1} - \frac{\sqrt{3x + 13} - 4}{x - 1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{4x+5}-3}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{4x+5}+3}{\sqrt{4x+5}+3}$$
$$-\frac{\sqrt{3x+13}-4}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{3x+13}+4}{\sqrt{3x+13}+4}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}^2-1^2}{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{4x+5}^2-3^2}{x-1}$$
$$\cdot\frac{1}{\sqrt{4x+5}+3}-\frac{\sqrt{3x+13}^2-4^2}{x-1}$$
$$\cdot\frac{1}{\sqrt{3x+13}+4}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{4x+5-9}{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{4x+5}+3}$$
$$-\frac{3x+13-16}{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{3x+13}+4}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{4x-4}{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{4x+5}+3}-\frac{3x-3}{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{3x+13}+4}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{4(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{4x+5}+3}-\frac{3(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{3x+13}+4}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{4}{\sqrt{4x+5}+3}-\frac{3}{\sqrt{3x+13}+4}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{1}+1}+\frac{4}{\sqrt{4\cdot 1+5}+3}-\frac{3}{\sqrt{3\cdot 1+13}+4}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{4}{3+3}-\frac{3}{4+4}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{2}+\frac{4}{6}-\frac{3}{8}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{8} = \frac{12+16-9}{24}=\frac{19}{24}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+13}}{x-1}=\frac{19}{24}$$

17.- $\boldsymbol{\lim_{x\to 2a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2a}+\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x^2-4a^2}}}$

$$\lim_{x\to 2a}\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{2a}+\sqrt{2a-2a}}{\sqrt{(2a)^2-4a^2}}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2a})}{\sqrt{x^2-4a^2}}+\frac{\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x^2-4a^2}}$$

$$\lim_{x\to 2a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{x^2-4a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-4a^2}}{\sqrt{x^2-4a^2}}+\sqrt{\frac{(x-2a)}{(x-2a)(x+2a)}}$$

$$\lim_{x \to 2a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2a}}{\sqrt{x^2 - 4a^2}^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 4a^2}}{1} + \sqrt{\frac{1}{x + 2a}}$$

$$\lim_{x \to 2a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2a}}{x^2 - 4a^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 4a^2}}{1} + \frac{1}{\sqrt{x + 2a}}$$

$$\lim_{x \to 2a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2a}}{x^2 - 4a^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 4a^2}}{1} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2a}}{\sqrt{x} + \sqrt{2a}} + \frac{1}{\sqrt{x + 2a}}$$

$$\lim_{x \to 2a} \frac{\sqrt{x}^2 - \sqrt{2a}^2}{x^2 - 4a^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 4a^2}}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2a}} + \frac{1}{\sqrt{x + 2a}}$$

$$\lim_{x \to 2a} \frac{x - 2a}{x^2 - 4a^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 4a^2}}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2a}} + \frac{1}{\sqrt{x + 2a}}$$

$$\lim_{x\to 2a} \frac{x-2a}{x^2-4a^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2-4a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2a}} + \frac{1}{\sqrt{x+2a}}$$

$$\lim_{x\to 2a} \frac{(x-2a)}{(x-2a)(x+2a)} \cdot \frac{\sqrt{x^2-4a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2a}} + \frac{1}{\sqrt{x+2a}}$$

$$\lim_{x\to 2a} \frac{1}{(x+2a)} \cdot \frac{\sqrt{x^2-4a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2a}} + \frac{1}{\sqrt{x+2a}}$$

$$\lim_{x\to 2a} \frac{1}{(2a+2a)} \cdot \frac{\sqrt{(2a)^2-4a^2}}{\sqrt{2a}+\sqrt{2a}} + \frac{1}{\sqrt{2a+2a}}$$

$$\lim_{x\to 2a} \frac{1}{(2a+2a)} \cdot \frac{\sqrt{(2a)^2-4a^2}}{\sqrt{2a}+\sqrt{2a}} + \frac{1}{\sqrt{2a+2a}}$$

$$\lim_{x\to 2a} \frac{1}{4a} \cdot \frac{0}{\sqrt{2a}+\sqrt{2a}} + \frac{1}{\sqrt{2a+2a}}$$

$$\lim_{x\to 2a}\frac{1}{\sqrt{2a+2a}}=\lim_{x\to 2a}\frac{1}{\sqrt{4a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$\lim_{x\to 2a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2a}+\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x^2-4a^2}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

18. $\boldsymbol{\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+7}-\sqrt{2x^2+10x-3}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x^2-1}}}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1^2+1+7}-\sqrt{2\cdot 1^2+10\cdot 1-3}}{\sqrt{1^2+1}-\sqrt{3\cdot 1^2-1}}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+7}-\sqrt{2x^2+10x-3}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x^2-1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{2x^2+10x-3}}{\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{2x^2+10x-3}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3x^2-1}}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+x+7}^2 - \sqrt{2x^2+10x-3}^2}{\sqrt{x^2+1}^2 - \sqrt{3x^2-1}^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{2x^2+10x-3}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3x^2-1}}{1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+x+7}^2 - \sqrt{2x^2+10x-3}^2}{\sqrt{x^2+1}^2 - \sqrt{3x^2-1}^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{2x^2+10x-3}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3x^2-1}}{1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+7-2x^2-10x+3}{x^2+1-3x^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{2x^2+10x-3}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3x^2-1}}{1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-x^2-9x+10}{-2x^2+2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{2x^2+10x-3}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3x^2-1}}{1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-(x^2+9x-10)}{-2(x^2-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{2x^2+10x-3}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3x^2-1}}{1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+10)(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{2x^2+10x-3}}$$

$$\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3x^2-1}}{1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+10)}{(x+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{2x^2+10x-3}}$$

$$\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3x^2-1}}{1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1+10)}{(1+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1^2+1+7}+\sqrt{2\cdot 1^2+10\cdot 1-3}}$$

$$\cdot\frac{\sqrt{1^2+1}+\sqrt{3\cdot 1^2-1}}{1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{9}} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{1} = \frac{11}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+x+7}-\sqrt{2x^2+10x-3}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x^2-1}} = \frac{11}{2} \cdot \sqrt{2}$$

19.- $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \sqrt{16x^2+8x+6}-\sqrt{16x^2-8x-6}}$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{16\cdot\infty^2+8\cdot\infty+6}-\sqrt{16\cdot\infty^2-8\cdot\infty-6}$$

$$= \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{16x^2+8x+6} - \sqrt{16x^2-8x-6}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{16x^2+8x+6} + \sqrt{16x^2-8x-6}}{\sqrt{16x^2+8x+6} + \sqrt{16x^2-8x-6}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{16x^2+8x+6}^{\,2} - \sqrt{16x^2-8x-6}^{\,2}}{\sqrt{16x^2+8x+6} + \sqrt{16x^2-8x-6}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{16x^2+8x+6-16x^2+8x+6}{\sqrt{16x^2+8x+6} + \sqrt{16x^2-8x-6}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{16x+12}{\sqrt{16x^2+8x+6} + \sqrt{16x^2-8x-6}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4(4x+3)}{\sqrt{16x^2+8x+6} + \sqrt{16x^2-8x-6}}$$

$$4\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x+3}{x}}{\frac{\sqrt{16x^2+8x+6}+\sqrt{16x^2-8x-6}}{\sqrt{x^2}}}$$

$$4\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x+3}{x}}{\frac{\sqrt{16x^2+8x+6}}{\sqrt{x^2}}+\frac{\sqrt{16x^2-8x-6}}{\sqrt{x^2}}}$$

$$4\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x}+\frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{16x^2+8x+6}{x^2}}+\sqrt{\frac{16x^2-8x-6}{x^2}}}$$

$$4\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{16x^2}{x^2}+\frac{8x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}+\sqrt{\frac{16x^2}{x^2}-\frac{8x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}}$$

$$4\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{3}{x}}{\sqrt{16+\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}}+\sqrt{16-\frac{8}{x}-\frac{6}{x^2}}}$$

$$=\frac{4+\frac{3}{\infty}}{\sqrt{16+\frac{8}{\infty}+\frac{6}{\infty}}+\sqrt{16-\frac{8}{\infty}-\frac{6}{\infty}}}$$

$$4\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{16}+\sqrt{16}}=\frac{4}{4+4}=4\cdot\frac{4}{8}=2$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{16x^2+8x+6}-\sqrt{16x^2-8x-6}=2$$

20.- $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x+3}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2\cdot\infty^2+1}}{\infty+3}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{x+3}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}}}{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}=\frac{\sqrt{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}=\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{\infty}}}{1+\frac{3}{\infty}}=\frac{\sqrt{2+0}}{1+0}=\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x+3}=\sqrt{2}$$

21.-$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\sqrt{(x+a)(x+b)}-x}$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{(\infty+a)(\infty+b)}-\infty=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\cdot\frac{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{(x+a)(x+b)}^{2}-x^{2}}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^{2}}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2}+xb+ax+ab-x^{2}}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{xb+ax+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{xb+ax+ab}{x}}{\frac{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}{\sqrt{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{xb}{x}+\frac{ax}{x}+\frac{ab}{x}}{\sqrt{\frac{(x+a)(x+b)}{x^2}}+\frac{x}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{b+a+\frac{ab}{x}}{\sqrt{\frac{(x+a)(x+b)}{x^2}}+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{b+a+\frac{ab}{x}}{\sqrt{\frac{(x+a)}{x}\cdot\frac{(x+b)}{x}}+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{b+a+\frac{ab}{x}}{\sqrt{\left(\frac{x}{x}+\frac{a}{x}\right)\left(\frac{x}{x}+\frac{b}{x}\right)}+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{b+a+\frac{ab}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{b+a+\frac{ab}{\infty}}{\sqrt{\left(1+\frac{a}{\infty}\right)\left(1+\frac{b}{\infty}\right)}+1} = \frac{b+a}{\sqrt{1}+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a+b}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{(x+a)(x+b)} - x = \frac{a+b}{2}$$

22.- $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+\sqrt{2x}}-\sqrt{x-\sqrt{2x}}$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\infty+\sqrt{2\cdot\infty}}-\sqrt{\infty-\sqrt{2\cdot\infty}}=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+\sqrt{2x}}-\sqrt{x-\sqrt{2x}}\cdot\frac{\sqrt{x+\sqrt{2x}}+\sqrt{x-\sqrt{2x}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x}}+\sqrt{x-\sqrt{2x}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{2x}}^2-\sqrt{x-\sqrt{2x}}^2}{\sqrt{x+\sqrt{2x}}+\sqrt{x-\sqrt{2x}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{x+\sqrt{2x}}+\sqrt{x-\sqrt{2x}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{2x}}+\sqrt{x-\sqrt{2x}}}{\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt[4]{x}}}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{2x}}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x-\sqrt{2x}}}{\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot\sqrt{\frac{2x}{x}}}{\sqrt{\left(\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{2x}}{x}\right)} + \sqrt{\left(\frac{x}{x}-\frac{\sqrt{2x}}{x}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{x\cdot x^{-\frac{1}{2}}}\right)} + \sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{x\cdot x^{-\frac{1}{2}}}\right)}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)} + \sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\infty}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{\infty}\right)}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{(1+1)}+\sqrt{(1-1)}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{2x}} - \sqrt{x-\sqrt{2x}} = \sqrt{2}$$

23.- $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3+x^2}}{x}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8\cdot\infty^3+\infty^2}-\sqrt[3]{\infty^3+\infty^2}}{\infty} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 + x^2}}{\sqrt[3]{x}^3}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + x^2}}{\sqrt[3]{x}^3} - \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^2}}{\sqrt[3]{x}^3}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{8x^3 + x^2}{x^3}} - \sqrt[3]{\frac{x^3 + x^2}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\left(\frac{8x^3}{x^3} + \frac{x^2}{x^3}\right)} - \sqrt[3]{\left(\frac{x^3}{x^3} + \frac{x^2}{x^3}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\left(8 + \frac{1}{x^2}\right)} - \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\left(8 + \frac{1}{\infty}\right)} - \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{(8+0)} - \sqrt[3]{(1+0)} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{2^3} - \sqrt[3]{1}$$

$$\lim_{x\to\infty} 2 - 1 = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 + x^2}}{x} = 1$$

24.- $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} x^2 - \sqrt[3]{x^6 - 2x^4}}$

$$\lim_{x\to\infty} \infty^2 - \sqrt[3]{\infty^6 - 2\cdot\infty^4} = \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^2 - \sqrt[3]{x^6 - 2x^4}\right) \cdot \frac{\left(x^4 + x^2\cdot\sqrt[3]{x^6 - 2x^4} + \sqrt[3]{x^6 - 2x^4}^{\,2}\right)}{\left(x^4 + x^2\cdot\sqrt[3]{x^6 - 2x^4} + \sqrt[3]{x^6 - 2x^4}^{\,2}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left((x^2)^3-\sqrt[3]{x^6-2x^4}^3\right)\cdot\frac{1}{(x^4+x^2\cdot\sqrt[3]{x^6-2x^4}+\sqrt[3]{x^6-2x^4}^2)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left((x^2)^3-\sqrt[3]{x^6-2x^4}^3\right)}{\left(x^4+x^2\cdot\sqrt[3]{x^6-2x^4}+\sqrt[3]{x^6-2x^4}^2\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^6-x^6+2x^4)}{(x^4+x^2\cdot\sqrt[3]{x^6-2x^4}+\sqrt[3]{x^6-2x^4}^2)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4}{\left(x^4+x^2\cdot\sqrt[3]{x^6-2x^4}+\sqrt[3]{x^6-2x^4}^2\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^4}{x^4}}{\frac{x^4+x^2\cdot\sqrt[3]{x^6-2x^4}+\sqrt[3]{x^6-2x^4}^2}{x^4}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\frac{x^4}{x^4} + \frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x^6 - 2x^4}}{x^4} + \frac{\sqrt[3]{x^6 - 2x^4}^2}{x^4}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{1 + \frac{\sqrt[3]{x^6 - 2x^4}}{x^2} + \left(\frac{\sqrt[3]{x^6 - 2x^4}}{x^2}\right)^2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\frac{\sqrt[3]{x^6-2x^4}}{\sqrt[3]{(x^2)^3}}+\left(\frac{\sqrt[3]{x^6-2x^4}}{\sqrt[3]{(x^2)^3}}\right)^2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\sqrt[3]{\frac{x^6-2x^4}{x^6}}+\left(\sqrt[3]{\frac{x^6-2x^4}{x^6}}\right)^2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\sqrt[3]{\left(\frac{x^6}{x^6}-\frac{2x^4}{x^6}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{x^6}{x^6}-\frac{2x^4}{x^6}\right)}^2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}^2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{\infty}\right)}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{\infty}\right)}^2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}^{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 - \sqrt[3]{x^6-2x^4} = \frac{2}{3}$$

25.- $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{3x^3+2x}+x}{x-1}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{3\cdot\infty^3+2\cdot\infty}\ +\ \infty}{\infty-1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{3x^3+2x}\ +\ x}{x-1}$$

$$\cdot\frac{\left(\left(\sqrt[3]{3x^3+2x}\right)^2 - x\cdot\sqrt[3]{3x^3+2x}+x^2\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{3x^3+2x}\right)^2 - x\cdot\sqrt[3]{3x^3+2x}+x^2\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{3x^3+2x}\right)^3 \; + \; x^3}{x-1}$$

$$\cdot \frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{3x^3+2x}\right)^2 - x\cdot\sqrt[3]{3x^3+2x} + x^2\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+2x+\; x^3}{x-1}$$

$$\cdot \frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{3x^3+2x}\right)^2 - x\cdot\sqrt[3]{3x^3+2x} + x^2\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+2x}{x-1}$$

$$\cdot \frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{3x^3+2x}\right)^2 - x\cdot\sqrt[3]{3x^3+2x} + x^2\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x^3+2x}{x^3}}{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{1}{\frac{\left(\sqrt[3]{3x^3+2x}\right)^2 - x\cdot\sqrt[3]{3x^3+2x} + x^2}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{4x^3}{x^3}+\dfrac{2x}{x^3}}{\dfrac{x}{x}-\dfrac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{\left(\sqrt[3]{3x^3+2x}\right)^2}{x^2}-\dfrac{x\cdot\sqrt[3]{3x^3+2x}}{x^2}+\dfrac{x^2}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\left(\left(\dfrac{\sqrt[3]{3x^3+2x}}{x}\right)^2-\dfrac{\sqrt[3]{3x^3+2x}}{x}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\left(\left(\dfrac{\sqrt[3]{3x^3+2x}}{\sqrt[3]{x^3}}\right)^2-\dfrac{\sqrt[3]{3x^3+2x}}{\sqrt[3]{x^3}}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\left(\dfrac{3x^3}{x^3}+\dfrac{2x}{x^3}\right)^2}-\sqrt[3]{\dfrac{3x^3}{x^3}+\dfrac{2x}{x^3}}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\left(3+\dfrac{2}{x^2}\right)^2}-\sqrt[3]{3+\dfrac{2}{x^2}}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{2}{\infty}}{1-\dfrac{1}{\infty}}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\left(3+\dfrac{2}{\infty}\right)^2}-\sqrt[3]{3+\dfrac{2}{\infty}}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4+0}{1-0}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[3]{(3+0)^2}-\sqrt[3]{3+0}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\left(\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}+1\right)}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{3}+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4}{\left(\sqrt[3]{3^3}+1\right)} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}+1}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{4} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}+1}{1} = \sqrt[3]{3}+1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{3x^3+2x}\ +\ x}{x-1} = \sqrt[3]{3}+1$$

$$\textit{26.-}\ \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi+2x)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+3x\right)}{\sin\left(3\frac{\pi}{2}+3x\right)}$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\pi+2\cdot-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+3\cdot-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(3\frac{\pi}{2}+3\cdot-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{(\pi-\pi)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{0}{0}$$

$$\cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha\cdot\cos\theta - \sin\alpha\cdot\sin\theta$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi+2x)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+3x\right)}{\sin\left(3\frac{\pi}{2}+3x\right)}$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi+2x)(\cos\frac{3\pi}{2}\cdot\cos 3x-\sin\frac{3\pi}{2}\cdot\sin 3x)}{\sin\left(3\frac{\pi}{2}+3x\right)}$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi+2x)(\cos\frac{3\pi}{2}\cdot\cos 3x-\sin\frac{3\pi}{2}\cdot\sin 3x)}{\sin\left(3\frac{\pi}{2}+3x\right)}$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi+2x)(0\cdot\cos 3x-(-1)\cdot\sin 3x)}{\sin\left(3\frac{\pi}{2}+3x\right)}$$

$$lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi+2x)(sin\,3x)}{sin\left(3\frac{\pi}{2}+3x\right)}$$

$$\sin(\alpha + \theta) = \sin\alpha \cdot \cos\theta + \sin\theta \cdot \cos\alpha$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi + 2x)(sin\,3x)}{sin\left(3\frac{\pi}{2} + 3x\right)}$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi + 2x)(sin\,3x)}{\sin 3\frac{\pi}{2} \cdot \cos 3x + \sin 3x \cdot \cos 3\frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi + 2x)(sin\,3x)}{-1 \cdot \cos 3x + \sin 3x \cdot 0}$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} -\frac{(\pi + 2x)(sin\,3x)}{\cos 3x}$$

Cambio de Variable sea:

$$x + \frac{\pi}{2} = \mathrm{h} \quad , -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0 \;\Rightarrow \mathrm{h} \to 0$$

$$x = \mathrm{h} \; - \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} -\frac{\left(\pi + 2\left(h - \frac{\pi}{2}\right)\right)\left(sin\, 3 \cdot \left(h - \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\cos 3 \cdot \left(h - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} -\frac{(\pi + 2h - \pi)\left(sin\left(3h - 3\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\cos\left(3h - 3\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} -\frac{2h\left(sin\left(3h - 3\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\cos\left(3h - 3\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\sin(\alpha - \theta) = \sin\alpha \cdot \cos\theta - \sin\theta \cdot \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha - \theta) = \cos\alpha \cdot \cos\theta + \sin\alpha \cdot \sin\theta$$

$$\lim_{x\to 0} -\frac{2h\left(\sin 3h \cdot \cos 3\frac{\pi}{2} - \sin 3\frac{\pi}{2} \cdot \cos 3h\right)}{\cos 3h \cdot \cos 3\frac{\pi}{2} + \sin 3h \cdot \sin 3\frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0} -\frac{2h(\sin 3h \cdot 0 - (-1) \cdot \cos 3h)}{\cos 3h \cdot 0 + \sin 3h \cdot (-1)}$$

$$\lim_{x\to 0} -\frac{2\text{h}(\cos 3\text{h})}{-\sin 3\text{h}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\text{h}(\cos 3\text{h})}{\sin 3\text{h}} = \lim_{x\to 0} \frac{2(\cos 3\text{h})}{\frac{\sin 3\text{h}}{\text{h}} \cdot \frac{3}{3}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(\cos 3\text{h})}{\frac{\sin 3\text{h}}{3\text{h}} \cdot 3} = \frac{2 \cdot \lim\limits_{x\to 0} (\cos 3\text{h})}{3 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3\text{h}}{3\text{h}}}$$

$$= \frac{2 \cdot \lim\limits_{x\to 0} (\cos 3 \cdot 0)}{3 \cdot 1} = \frac{2 \cdot \lim\limits_{x\to 0} (1)}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi + 2x)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3x\right)}{\sin\left(3\frac{\pi}{2} + 3x\right)} = \frac{2}{3}$$

$$27.\text{-}\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{\frac{\cos(mx)-\cos(nx)}{x^2}}\right)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sqrt[3]{\left(\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{mx+nx}{2}\cdot\sin\frac{mx-nx}{2}}{x^2}\right)}$$

$$\sqrt[3]{\left(\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{mx+nx}{2}\cdot\sin\frac{mx-nx}{2}}{x^2}\cdot\frac{\frac{mx+nx}{2}}{\frac{mx+nx}{2}}\cdot\frac{\frac{mx-nx}{2}}{\frac{mx-nx}{2}}\right)}$$

$$\sqrt[3]{\left(\lim_{x\to 0}-2\frac{\sin\frac{mx+nx}{2}}{\frac{mx+nx}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{mx-nx}{2}}{\frac{mx-nx}{2}}\cdot\frac{\frac{mx+nx}{2}}{x^2}\cdot\frac{\frac{mx-nx}{2}}{1}\right)}$$

$$\sqrt[3]{\left(\lim_{x\to 0} -2\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{\frac{mx+nx}{2}\cdot\frac{mx-nx}{2}}{x^2}\cdot\frac{1}{1}\right)}$$

$$\sqrt[3]{\left(\lim_{x\to 0} -2\cdot \frac{\frac{(mx)^2-(nx)^2}{4}}{x^2}\right)}$$

$$\sqrt[3]{\left(\lim_{x\to 0} -2\cdot \frac{(mx)^2-(nx)^2}{4x^2}\right)}$$

$$\sqrt[3]{\left(\lim_{x\to 0} -2\cdot \frac{x^2(m^2-n^2)}{4x^2}\right)}$$

$$\sqrt[3]{\left(\lim_{x\to 0} -2\cdot \frac{(m^2-n^2)}{4}\right)} = \sqrt[3]{\left(\frac{(n^2-m^2)}{2}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{\frac{\cos(mx)-\cos(nx)}{x^2}}\right)=\sqrt[3]{\left(\frac{(n^2-m^2)}{2}\right)}$$

28.- $\boldsymbol{\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-x}{sin(x-1)}+\frac{\sqrt{x}-1}{sin(x-1)}\right)}$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1^2-1}{\sin(1-1)}+\frac{\sqrt{1}-1}{\sin(1-1)}\right)=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-x}{\sin(x-1)}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sin(x-1)}\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x(x-1)}{\sin(x-1)}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sin(x-1)}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}}+\frac{\sqrt{x}^{2}-1}{\sin(x-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}}+\frac{(x-1)}{\sin(x-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}}+\frac{1}{\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{1}+\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}+1}\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-x}{\sin(x-1)}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sin(x-1)}\right)=\frac{3}{2}$$

29.- $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x+3}{x^3+4}\right)^{x^2+2}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\infty^3+2\cdot\infty+3}{\infty^3+4}\right)^{\infty^2+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^3+2x+3}{x^3+4}-1\right)^{x^2+2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^3+2x+3-x^3-4}{x^3+4}\right)^{x^2+2}$$

$$\lim_{x\to a}\left[\left(1+f_{(x)}\right)^{\frac{1}{f_{(x)}}}\right]^{f_{(x)}\cdot g_{(x)}}=e^{\lim\limits_{x\to a}f_{(x)}\cdot g_{(x)}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^3+4}\right)^{x^2+2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2x-1}{x^3+4}\right)^{\frac{1}{\frac{2x-1}{x^3+4}}}\right]^{\frac{2x-1}{x^3+4}\cdot(x^2+2)}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^3+4}\cdot(x^2+2)}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\ \frac{2x-1}{x^3+4}\cdot(x^2+2)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\ \frac{2x^3-x^2+4x-2}{x^3+4}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3-x^2+4x-2}{x^3}}{\frac{x^3+4}{x^3}}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}+\frac{4x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{4}{x^3}}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{1+\frac{4}{x^3}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{\infty}+\frac{4}{\infty^2}-\frac{2}{\infty^3}}{1+\frac{4}{\infty^3}}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-0+0-0}{1+0}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} 2} = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x+3}{x^3+4}\right)^{x^2+2} = e^2$$

$$\textbf{\textit{30.-}}\lim_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos 0+\sin 0)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+\cos x+\sin x\ -1)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to a}\left[\left(1+f_{(x)}\right)^{\frac{1}{f_{(x)}}}\right]^{f_{(x)}\cdot g_{(x)}} = e^{\lim\limits_{x\to a} f_{(x)}\cdot g_{(x)}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[(1+\cos x+\sin x\ -1)^{\frac{1}{\cos x+\sin x\,-1}}\right]^{(\cos x+\sin x\,-1)\cdot\frac{1}{x}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x\,-1)\cdot\frac{1}{x}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(0+1)} = e^1$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e$$

31.- $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{0^2-2\cdot 0+3}{0^2-3\cdot 0+2}\right)^{\frac{\sin 0}{0}} = (1)^{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}-1\right)^{\frac{\sin x}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^2-2x+3-x^2+3x-2}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x+1}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$$

$$\lim_{x\to a}\left[\left(1+f_{(x)}\right)^{\frac{1}{f_{(x)}}}\right]^{f_{(x)}\cdot g_{(x)}} = e^{\lim\limits_{x\to a} f_{(x)}\cdot g_{(x)}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x+1}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{1}{\frac{x+1}{x^2-3x+2}}}\right]^{\frac{x+1}{x^2-3x+2}\cdot\frac{\sin x}{x}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2-3x+2}\cdot\frac{\sin x}{x}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2-3x+2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{0+1}{0-3\cdot 0+2}\cdot 1} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}} = \sqrt{e}$$

31.- $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\infty^2-1}{\infty^2+1}\right)^{\frac{\infty-1}{\infty+1}} = \infty^{\infty}$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = M^N$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = M\,;\ \lim_{x\to a} g(x) = N$$

$$M=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-0}{1+0}=1$$

$$N=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\mathrm{x}-1}{x}}{\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{\infty}}{1+\infty}\ =\lim_{x\to\infty}\frac{1-0}{1+0}=1$$

$$M^N=1^1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}=1$$

32. $-\lim_{x\to 0}\frac{9^x-7^x}{8^x-6^x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{9^0-7^0}{8^0-6^0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(9^x-1)-(7^x-1)}{(8^x-1)-(6^x-1)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(9^x-1)-(7^x-1)}{x}}{\frac{(8^x-1)-(6^x-1)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9^x-1}{x}-\frac{7^x-1}{x}}{\frac{8^x-1}{x}-\frac{6^x-1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln 9-\ln 7}{\ln 8-\ln 6}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{9}{7}}{\ln\frac{8}{6}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{9}{7}}{\ln\frac{4}{3}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{9^x-7^x}{8^x-6^x}=\frac{\ln\frac{9}{7}}{\ln\frac{4}{3}}$$

33.- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^0+b^0+c^0}{3}\right)^{\frac{1}{0}} = \left(\frac{3}{3}\right)^{\infty} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to a}\left[\left(1+f_{(x)}\right)^{\frac{1}{f_{(x)}}}\right]^{f_{(x)}\cdot g_{(x)}} = e^{\lim\limits_{x\to a} f_{(x)}\cdot g_{(x)}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{1}{\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}}}\right]^{\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)+(b^x-1)+(c^x-1)}{\mathrm{x}}\cdot\frac{1}{3}} = e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)\cdot\frac{1}{3}}$$

$$e^{\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{b^x-1}{x}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{c^x-1}{x}\right)\right)}$$

$$e^{\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to 0}\ln a+\lim_{x\to 0}\ln b+\lim_{x\to 0}\ln c\right)}$$

$$e^{\frac{1}{3}(\ln a+b+\ln c)} = e^{\frac{1}{3}(\ln abc)} = e^{\frac{\ln abc}{3}}$$

$$e^{\frac{1}{3}\cdot\ln abc} = e^{\ln abc^{\frac{1}{3}}} = e^{\ln \sqrt[3]{abc}}$$

$$\sqrt[3]{abc}^{\ln e} = \sqrt[3]{abc}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{abc}$$

34.- $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}}}$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[0]{\frac{a^{0+1}+b^{0+1}+c^{0+1}}{a+b+c}} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(1+\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(1+\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}-a-b-c}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}-a-b-c}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}-a-b-c}{a+b+c}}}\right]^{\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}-a-b-c}{a+b+c}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}-a-b-c}{a+b+c}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x+1}-a+b^{x+1}-b+c^{x+1}-c}{a+b+c}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a(a^{x}-1)+b(b^{x}-1)+c(c^{x}-1)}{a+b+c}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a(a^{x}-1)+b(b^{x}-1)+c(c^{x}-1)}{x}\cdot\frac{1}{a+b+c}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a(a^{x}-1)}{x}+\frac{b(b^{x}-1)}{x}+\frac{c(c^{x}-1)}{x}\right)\cdot\frac{1}{a+b+c}}$$

$$e^{\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{a(a^{x}-1)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{b(b^{x}-1)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{c(c^{x}-1)}{x}\right)\cdot\frac{1}{a+b+c}}$$

$$e^{\left(\lim\limits_{x\to 0} a\cdot\ln a+\lim\limits_{x\to 0} b\cdot\ln b+\lim\limits_{x\to 0} c\cdot\ln c\right)\cdot\frac{1}{a+b+c}}$$

$$e^{(\ a\cdot\ln a+b\cdot\ln b+c\ln c)\cdot\frac{1}{a+b+c}}$$

$$e^{(a\cdot\ln a+b\cdot\ln b+c\ln c)\cdot\frac{1}{a+b+c}}$$

$$e^{\frac{(a\cdot\ln a+b\cdot\ln b+c\ln c)}{a+b+c}}$$

$$e^{\frac{a}{a+b+c}\cdot\ln a+\frac{b}{a+b+c}\cdot\ln b+\frac{c}{a+b+c}\cdot\ln c}$$

$$e^{\ln a^{\frac{a}{a+b+c}}+\ln b^{\frac{b}{a+b+c}}+\ln c^{\frac{c}{a+b+c}}}$$

$$e^{\ln a^{\frac{a}{a+b+c}}\cdot b^{\frac{b}{a+b+c}}\cdot c^{\frac{c}{a+b+c}}}$$

$$\left(a^{\frac{a}{a+b+c}}\cdot b^{\frac{b}{a+b+c}}\cdot c^{\frac{c}{a+b+c}}\right)^{\ln e}=(a^a\cdot b^b\cdot c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$$

35.- $\boldsymbol{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2} \ln \cos x$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln \cos x^{\frac{1}{x^2}} = \ln \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to a} \left[\left(1+f_{(x)}\right)^{\frac{1}{f_{(x)}}}\right]^{f_{(x)}\cdot g_{(x)}} = e^{\lim_{x\to a} f_{(x)}\cdot g_{(x)}}$$

$$\ln \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\cos x-1)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\ln \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\cos x-1\cdot\frac{1}{x^2}}$$

$$\ln e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x-1\cdot\frac{1}{x^2}} = \ln e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} -\frac{1-\cos x}{x^2}}$$

$$\ln e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}} = \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\ln e = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\mathbf{36.-}\ \boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(\cos ax)}{x^2}}{\frac{\ln(\cos bx)}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^2}\ln(\cos ax)}{\frac{1}{x^2}\ln(\cos bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}}{\ln(\cos bx)^{\frac{1}{x^2}}}$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to 0} \ln(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to 0} \ln(\cos bx)^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{\ln \lim\limits_{x\to 0} (\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}}{\ln \lim\limits_{x\to 0} (\cos bx)^{\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to a}\left[\left(1+f_{(x)}\right)^{\frac{1}{f(x)}}\right]^{f(x)\cdot g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)}$$

$$\frac{\ln \lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\cos ax-1)^{\frac{1}{\cos ax-1}}\right]^{\cos ax-1\cdot\frac{1}{x^2}}}{\ln \lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\cos bx-1)^{\frac{1}{\cos bx-1}}\right]^{\cos bx-1\cdot\frac{1}{x^2}}}$$

$$\frac{\ln e^{\lim\limits_{x\to 0} \cos ax-1\cdot\frac{1}{x^2}}}{\ln e^{\lim\limits_{x\to 0} \cos bx-1\cdot\frac{1}{x^2}}} = \frac{\ln e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos ax-1}{x^2}}}{\ln e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos bx-1}{x^2}}}$$

$$\frac{\ln e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos ax-1}{x^2}\cdot\frac{a^2}{a^2}}}{\ln e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos bx-1}{x^2}\cdot\frac{b^2}{b^2}}} = \frac{\ln e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos ax-1}{(ax)^2}\cdot\frac{a^2}{1}}}{\ln e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos bx-1}{(bx)^2}\cdot\frac{b^2}{1}}}$$

$$\frac{\ln e^{a^2}}{\ln e^{b^2}} = \frac{a^2 \cdot \ln e}{b^2 \cdot \ln e} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\mathbf{37.} - \boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{1}{ax} \ln \sqrt[3]{\frac{(1+ax)}{(1-ax)}}}$$

$$\lim_{x\to 0} \ln\left(\sqrt[3]{\frac{(1+ax)}{(1-ax)}}\right)^{\frac{1}{ax}} = \ln \lim_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{\frac{(1+ax)}{(1-ax)}}\right)^{\frac{1}{ax}}$$

$$\lim_{x\to a}\left[\left(1+f_{(x)}\right)^{\frac{1}{f_{(x)}}}\right]^{f_{(x)}\cdot g_{(x)}} = e^{\lim\limits_{x\to a} f_{(x)}\cdot g_{(x)}}$$

$$\ln \lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt[3]{\frac{(1+ax)}{(1-ax)}}-1\right)^{\frac{1}{ax}}$$

$$\ln \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\sqrt[3]{\frac{(1+ax)}{(1-ax)}}-1\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{(1+ax)}{(1-ax)}}-1}}\right]^{\left(\sqrt[3]{\frac{(1+ax)}{(1-ax)}}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{ax}\right)}$$

$$\ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{\frac{(1+ax)}{(1-ax)}}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{ax}\right)}$$

$$\ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{1+ax}-\sqrt[3]{1-ax}}{\sqrt[3]{1-ax}}\right)\cdot\left(\frac{1}{ax}\right)}$$

$$\ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt[3]{1+ax}-\sqrt[3]{1-ax}\right)}{\sqrt[3]{1-ax}}\cdot\frac{\left(\left(\sqrt[3]{1+ax}\right)^2+\sqrt[3]{1-ax}\cdot\sqrt[3]{1+ax}+\left(\sqrt[3]{1-ax}\right)^2\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{1+ax}\right)^2+\sqrt[3]{1-ax}\cdot\sqrt[3]{1+ax}+\left(\sqrt[3]{1-ax}\right)^2\right)}\right)\cdot\left(\frac{1}{ax}\right)}$$

$$\ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt[3]{1+ax}\right)^3-\left(\sqrt[3]{1-ax}\right)^3}{\sqrt[3]{1-ax}}\cdot\frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{1+ax}\right)^2+\sqrt[3]{1-ax}\cdot\sqrt[3]{1+ax}+\left(\sqrt[3]{1-ax}\right)^2\right)}\right)\cdot\left(\frac{1}{ax}\right)}$$

$$\ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+ax-1+ax}{\sqrt[3]{1-ax}}\cdot\frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{1+ax}\right)^2+\sqrt[3]{1-ax}\cdot\sqrt[3]{1+ax}+\left(\sqrt[3]{1-ax}\right)^2\right)}\right)\cdot\left(\frac{1}{ax}\right)}$$

$$\ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2ax}{\sqrt[3]{1-ax}}\cdot\frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{1+ax}\right)^2+\sqrt[3]{1-ax}\cdot\sqrt[3]{1+ax}+\left(\sqrt[3]{1-ax}\right)^2\right)}\right)\cdot\left(\frac{1}{ax}\right)}$$

$$\ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{1-ax}}\cdot\frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{1+ax}\right)^2+\sqrt[3]{1-ax}\cdot\sqrt[3]{1+ax}+\left(\sqrt[3]{1-ax}\right)^2\right)}\right)}$$

$$\ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{1-a\cdot 0}}\cdot\frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{1+a\cdot 0}\right)^2+\sqrt[3]{1-a\cdot 0}\cdot\sqrt[3]{1+a\cdot 0}+\left(\sqrt[3]{1-a\cdot 0}\right)^2\right)}\right)}$$

$$\ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{1}}\cdot\frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{1}\right)^2+\sqrt[3]{1}\cdot\sqrt[3]{1}+\left(\sqrt[3]{1}\right)^2\right)}\right)}$$

$$\ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\right)}=\ln e^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\ln e=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{ax}\ln\sqrt[3]{\frac{(1+ax)}{(1-ax)}}=\frac{2}{3}$$

$$\textbf{39.-}\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{2-\sqrt{\cos x}}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to a}\left[\left(1+f_{(x)}\right)^{\frac{1}{f_{(x)}}}\right]^{f_{(x)}\cdot g_{(x)}}=e^{\lim\limits_{x\to a} f_{(x)}\cdot g_{(x)}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\sqrt{2-\sqrt{\cos x}}-1\right)^{\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{\cos x}}-1}}\right]^{\left(\sqrt{2-\sqrt{\cos x}}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{2-\sqrt{\cos x}}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{2-\sqrt{\cos x}}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{\cos x}}+1}{\sqrt{2-\sqrt{\cos x}}+1}\cdot\frac{1}{x^2}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2-\sqrt{\cos x}}\right)^2-1^2}{\sqrt{2-\sqrt{\cos x}}+1}\cdot\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{\cos x}-1}{\sqrt{2-\sqrt{\cos x}}+1}\cdot\frac{1}{x^2}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sqrt{2-\sqrt{\cos x}}+1}\cdot\frac{\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}{\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}\cdot\frac{1}{x^2}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(1+\sqrt{\cos 0}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{\cos 0}}+1}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2)}\cdot\frac{1}{2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{8}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\left(\sqrt{\cos x}\right)^2}{\sqrt{2-\sqrt{\cos x}}+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}\cdot\frac{1}{x^2}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{\cos x}}+1}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{\cos x}}+1}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{2-\sqrt{\cos x}}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{8}}$$

39.- $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1-\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}}$

$$\lim_{x\to a}\left[\left(1+f_{(x)}\right)^{\frac{1}{f_{(x)}}}\right]^{f_{(x)}\cdot g_{(x)}} = e^{\lim\limits_{x\to a} f_{(x)}\cdot g_{(x)}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1+\tan x}{1-\sin x}-1\right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{\tan x+\sin x}{1-\sin x}\right)^{\frac{1}{\frac{\tan x+\sin x}{1-\sin x}}}\right]^{\frac{\tan x+\sin x}{1-\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x+\sin x}{1-\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+\sin x}{1-\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}}$$

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x+\sin x\cdot\cos x}{\cos x}}{1-\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}}$$

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x\cdot\cos x}{(\cos x)(1-\sin x)}\cdot\frac{1}{\sin x}}$$

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1+\cos x)}{(\cos x)(1-\sin x)}\cdot\frac{1}{\sin x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{(\cos x)(1-\sin x)}}$$

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{(\cos x)(1-\sin x)}\cdot\frac{(1+\sin x)}{(1+\sin x)}}$$

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{(\cos x)(1-(\sin x)^2)}\cdot\frac{(1+\sin x)}{1}}$$

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{(\cos x)\cdot(\cos x)^2}\cdot\frac{(1+\sin x)}{1}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{(\cos x)^3}\cdot\frac{(1+\sin x)}{1}}$$

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{1+1}{(\cos 0)^3}\cdot\frac{(1+\sin 0)}{1}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{2}{1}\cdot\frac{(1+0)}{1}} = e^2$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1-\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = e^2$$

40.- $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}(\cos x + a\sin bx)^{\frac{1}{x}}}$

$$\lim_{x\to a}\left[\left(1+f_{(x)}\right)^{\frac{1}{f_{(x)}}}\right]^{f_{(x)}\cdot g_{(x)}} = e^{\lim\limits_{x\to a} f_{(x)}\cdot g_{(x)}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[(1+\cos x + a\sin bx - 1)^{\frac{1}{\cos x + a\sin bx - 1}}\right]^{(\cos x + a\sin bx - 1)\cdot\frac{1}{x}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + a\sin bx - 1)\cdot\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x - 1 + a\sin bx)\cdot\frac{1}{x}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - 1}{x}+\frac{a\sin bx}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1-\cos x}{x}+\frac{a\sin bx}{bx}\cdot\frac{b}{1}\right)}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1-\cos x}{x}+\frac{a\sin bx}{bx}\cdot\frac{b}{1}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-0+\frac{ab}{1}\right)} = e^{ab}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x + a\sin bx)^{\frac{1}{x}} = e^{ab}$$

41.- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$

$$\lim_{x\to a}\left[\left(1+f_{(x)}\right)^{\frac{1}{f(x)}}\right]^{f(x)\cdot g(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-1}{x^2+1}-1\right)^{\mathrm{x}^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x^2+1}\right)^{\mathrm{x}^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\frac{-2}{x^2+1}}}\right]^{\frac{-2}{x^2+1}\cdot\mathrm{x}^2} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x^2+1}\cdot\mathrm{x}^2}$$

$$e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{x^2+1}} = e^{\lim_{x\to\infty}-\frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}}} = e^{\lim_{x\to\infty}-\frac{2}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$e^{\lim_{x\to\infty}-\frac{2}{1+\frac{1}{x^2}}} = e^{-2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\mathrm{x}^2}=e^{-2}$$

41.- $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{Ln\left(1+x+x^2\right)-Ln\left(1-x+x^2\right)}{x^2}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{Ln(1+x+x^2)-\mathrm{Ln}(1-x+x^2)}{1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot Ln\frac{(1+x+x^2)}{(1-x+x^2)}$$

$$\lim_{x\to 0} Ln\left(\frac{(1+x+x^2)}{(1-x+x^2)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$Ln\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{(1+x+x^2)}{(1-x+x^2)}-1\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$Ln \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1+x+x^2-1-x-x^2}{(1-x+x^2)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to a}\left[\left(1+f_{(x)}\right)^{\frac{1}{f_{(x)}}}\right]^{f_{(x)}\cdot g_{(x)}}=e^{\lim\limits_{x\to a} f_{(x)}\cdot g_{(x)}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{2x}{1-x+x^2}\right)^{\frac{1}{\frac{2x}{1-x+x^2}}}\right]^{\frac{2x}{1-x+x^2}\cdot\frac{1}{x^2}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{1-x+x^2}\cdot\frac{1}{x^2}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{1-x+x^2}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{1+x^2-x}\cdot\frac{1+x^2+x}{1+x^2+x}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{1+x^2+x^4}\cdot\frac{1+x^2+x}{1}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{1+x^2+x^4}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{x^2}{x}+\frac{x}{x}\right)}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{1+x^2+x^4}\cdot\left(\frac{1}{x}+x+1\right)}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{1+1+1}} = e^{\frac{2}{3}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x+x^2)-\mathrm{Ln}(1-x+x^2)}{x^2} = e^{\frac{2}{3}}$$

42.- $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{\ln x - Lna}}$

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\ln x - Lna} = \lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^{-1}}\cdot\frac{1}{\ln\frac{x}{a}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\ln\left(\frac{x}{a}\right)^{(x-a)^{-1}}}=\frac{1}{\ln\lim_{x\to a}\left(\frac{x}{a}\right)^{(x-a)^{-1}}}$$

$$\lim_{x\to a}\left[\left(1+f_{(x)}\right)^{\frac{1}{f_{(x)}}}\right]^{f_{(x)}\cdot g_{(x)}}=e^{\lim\limits_{x\to a}f_{(x)}\cdot g_{(x)}}$$

$$\frac{1}{\ln\lim_{x\to a}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{(x-a)}}}=\frac{1}{\ln\lim_{x\to a}\left(1+\frac{x}{a}-1\right)^{\frac{1}{(x-a)}}}$$

$$\frac{1}{\ln\lim_{x\to a}\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{1}{(x-a)}}}$$

$$\frac{1}{\ln\lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{a}{(x-a)}}\right]^{\frac{1}{a}}}$$

$$\frac{1}{\ln e^{\lim_{x\to a}\frac{1}{a}}}=\frac{1}{\ln e^{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{\frac{1}{a}\cdot\ln e}=a$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\ln x-Lna}=a$$

43.- $\boldsymbol{\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^{x}}{h^{2}}}$

$$\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{a^{x}\left(a^{\mathrm{h}}+a^{-\mathrm{h}}-2\right)}{\mathrm{h}^{2}}$$

$$\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{a^{x}\left(a^{\mathrm{h}}+\frac{1}{a^{\mathrm{h}}}-2\right)}{\mathrm{h}^{2}}$$

$$\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{a^{x}\left(\frac{a^{2\mathrm{h}}+1-2a^{\mathrm{h}}}{a^{\mathrm{h}}}\right)}{\mathrm{h}^{2}}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^x \left(\frac{a^{2h} - 2a^h + 1}{a^h} \right)}{h^2}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^x \cdot \left(a^h - 1 \right)^2}{a^h \cdot h^2}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^x}{a^h} \cdot \lim_{h \to 0} \left(\frac{a^h - 1}{h} \right)^2$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^x}{a^h} \cdot (\ln a)^2 = \lim_{h \to 0} a^{x-h} \cdot (\ln a)^2 = a^x \cdot (\ln a)^2$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2} = a^x \cdot (\ln a)^2$$

44.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-1}{b^{bx}-1}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{e^{ax}-1}{ax}\cdot\dfrac{ax}{1}}{\dfrac{b^{bx}-1}{bx}\cdot\dfrac{bx}{1}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln e\cdot\dfrac{ax}{1}}{\ln b\cdot\dfrac{bx}{1}} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{\ln b\cdot bx} = \frac{a}{\ln b\cdot b}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{b^{bx}-1} = \frac{a}{b\ ln\ b}$$

45.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x-4^x}{x^2-x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(5^x-1)-(4^x-1)}{x(x-1)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(5^x - 1) - (4^x - 1)}{x} \cdot \frac{1}{(x-1)}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{5^x - 1}{x} - \frac{4^x - 1}{x} \right) \frac{1}{(x-1)}$$

$$\lim_{x \to 0} (\ln 5 - \ln 4) \frac{1}{(x-1)}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\ln \frac{5}{4} \right) \frac{1}{(0-1)} = -1 \lim_{x \to 0} \ln \frac{5}{4}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{5^x - 4^x}{x^2 - x} = \ln \frac{5}{4}$$

Ejercicios propuestos de Limites

1.- $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3-2x-21}{x^4-27x}$

2.- $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-x^2-12x+20}$

3.- $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

4.- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-x^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}$, $\quad a > 0 \quad a \neq 1$

5.- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{5x^2+3x^5-8}{7x^4-4x-3}$

6.- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4+3x^3+7x^2-5x-6}{x^4+2x-3}$

7.-$\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(2+3x)-1}{x}$

8.- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$

9.- $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{2}{3x-6} - \frac{2}{2x^2-5x+2}\right)$

10.- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

11.- $\lim\limits_{X \to 1} \frac{x^{\mathrm{m}}-1}{x^n-1}$ $m, n \in \mathbb{Z}^+$

12.- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{2m}-1}{x^2-1}$

13.- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{14}+x^2-2}{x^{12}+4x^8+x^2-6}$

14. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(3+x)^n-3^n}{x}$

15.- $\lim_{x\to 1} \frac{(3x+5)^2-64}{x^2+x-2}$

16.- $\lim_{x\to 0} \frac{(x+3)(x+2)-(x+1)(x+6)}{(x+2)(x+4)-(x+1)(x+8)}$

17.- $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \left(\frac{x+1}{2x^2-3-2} + \frac{x}{2x^2+7x+3}\right)$

18.- $\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n-na^{n-1}(x-a)}{(x-1)^2}$

19 . $-\lim_{x\to 3} \frac{x^3-2x-21}{x^4-27x}$

20.- $\lim_{x\to 1} \frac{5x^2+3x^5-8}{7x^4-4x-3}$

21.- $\lim_{x\to 1} \frac{x^4+3x^3+7x^2-5x-6}{x^4+2x-3}$

22.- $\lim_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

23.-$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{14}+x^2-2}{x^{12}+4x^8+x^2-6}$

24.-$\lim\limits_{x\to 1} \frac{(3x+5)^2-64}{x^2+x-2}$

25. $-\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$

26.-$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

27.-$\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-4}-\sqrt{3x-14}}{x-5}$

28.-$\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$

29. $-\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x-6}{1-\sqrt{4x-7}}$

30. $-\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+a+b}-\sqrt{a+b}}{x}, a>0, b>0$

31. $-\lim\limits_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$

32.- $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{b^2-x}-\sqrt{b^2-a}}{x-a}$

33.-$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x}$

34.- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

35.-$\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

36.-$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}-2\sqrt[3]{x+1}+1}{x^2}$

37.-$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+13}}{x-1}$

38.- $\lim\limits_{x\to 2a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2a}+\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x^2-4a^2}}$

39. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+x+7}-\sqrt{2x^2+10x-3}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x^2-1}}$

40.- $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$

41. $-\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$

42.- $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

43 $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-4}-\sqrt{3x-14}}{x-5}$

44.- $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$

45.- $\lim_{x\to \infty} \frac{4x^3+7x+5}{-8x^3+x+2}$

46.- $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+2}-\frac{x^2}{x+2}\right)$

47.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-2}{2x+1}\div\frac{x^2-4x}{x-3}\right)$

48.- $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{16x^2+8x+6}-\sqrt{16x^2-8x-6}$

49.- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x+3}$

50.- $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{(x+a)(x+b)}-x$

51.- $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+\sqrt{2x}}-\sqrt{x-\sqrt{2x}}$

52.- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

53.- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+3}}}}{\sqrt{x+3}}$

54.- $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

55.- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3+x^2}}{x}$

56.- $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 - \sqrt[3]{x^6 - 2x^4}$

57.- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{3x^3+2x} + x}{x-1}$

58.- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 8x}{\mathrm{x}}$

59.- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{8\mathrm{x}-\sin 6x}{4\mathrm{x}+5\sin 3x}$

60.- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(\sin 4x)}{\sin^2(\sin 3x)}$

61.- $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$

62.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$

63.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{x} - \sin 2x}{x + sin3x}$

64.- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$

65.- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$

66.- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x - \cos a}{x - a}$

67.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - 2\cos x + \cos 2x}{x^2}$

68.- $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} \dfrac{(\pi + 2x)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3x\right)}{\sin\left(3\frac{\pi}{2} + 3x\right)}$

69.- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{\frac{\cos(mx)-\cos(nx)}{x^2}}\right)$

70.- $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2-x}{\sin(x-1)}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sin(x-1)}\right)$

71.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x+3}{x^3+4}\right)^{x^2+2}$

72.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

73.- $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

74.- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$

75.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

76.$-\lim_{x\to 0}\frac{9^x-7^x}{8^x-6^x}$

77.-$\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^x+x)^{\frac{m}{x}}$

78.-$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{In(1+x)}$

79.-$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

80.-$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}}$

81.- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

82.$-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$

83.-$\lim_{x\to 0}\left[\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right]^x$

84.- $\lim\limits_{x \to a} \frac{x-a}{\ln x - Lna}$

85. $-\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{ax} \ln \sqrt[3]{\frac{(1+ax)}{(1-ax)}}$

86.- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - Lnx}{h}$

87.- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{2-\sqrt{\cos x}}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

88.- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

89.- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1+\tan x}{1-\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

90.- $\lim_{x\to 0}(\cos x + a\sin bx)^{\frac{1}{x}}$

91.- $\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$

92.- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$

93.- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\mathrm{x}^2}$

94.- $\lim_{x\to 0}\frac{Ln\left(1+x+x^2\right)-\mathrm{Ln}\left(1-x+x^2\right)}{x^2}$

95. $-\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[\sqrt{3}]{1+\sin\sqrt{3}\cdot x}\right)^{\frac{1}{\sin\sqrt{3}\cdot x}}$

96.- $\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\ln x-Lna}$

97.- $\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{a^{x+\mathrm{h}}+a^{x-\mathrm{h}}-2a^{x}}{\mathrm{h}^2}$

98.-$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax}-1}{b^{bx}-1}$

99.-$\lim_{x \to 0} \frac{5^x-4^x}{x^2-x}$

100.-$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$

Bibliografía

(1) ALGEBRA PRE-UNIVERSITARIO Paulino Choque Puña 2001

(2) ALGEBRA 2011 Rubiño Ediciones 2010

(3) ELEMENTOS DE CALCULO INFITESIMAL H.B Philips 1956

(4) DERIVADAS E INTEGRALES Enrique Luis Etchegoyen 1956

(5) CALCULO 1 Ron Larzon Bruce H. EDWARS 2010

(6) ELEMENTOS DE CALCULO INFINITESIMAL H.B Phillips 1956

(7) CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL Franh Ayres, Jr. Eliot Mendelson