Lic. CPA Freddy A. Camargo

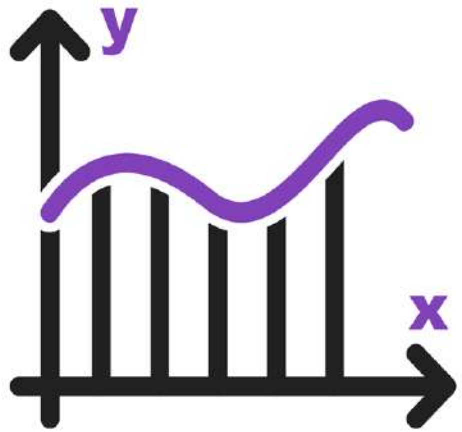
- *Licenciado en Contaduría Pública*
- *Diplomado en Investigación y Formación Tutorial CEPI*
- *Diplomado en la Enseñanza de la Matemática en la Educación Superior*
- *Diplomado en Análisis Financiero*
- *Certificado en Normas Internacionales de Auditoria (NIA)*
- *Certificado en Normas Internacionales de Información Financiera (NIIF)*
- *Certificado en Normas de Contabilidad Generalmente Aceptadas en Bolivia (NCGA)*

Freddy Camargo

Freddy A. Camargo

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

APUNTES - PARTE 2



LIC. CPA FREDDY A. CAMARGO CHAMBI

ANÁLISIS MATEMATICO I

APUNTES - PARTE 2

Freddy A. Camargo Chambi

2022

Título de la Obra

Análisis Matemático I, apuntes - parte 2

Primera Edición
Año de Publicación: **2022**

La Paz - Bolivia

AGRADECIMIENTO

A “Dios” nuestro creador

A mi querida familia

Y a las personas que día a día se esfuerzan por ser personas de provecho y por colaborar para que Bolivia tenga un futuro mejor.

Presentación

Análisis Matemático I, apuntes - parte 2, es un libro para los estudiantes de la Facultad de Contaduría Pública y Ciencias Financieras, Carrera de Contaduría Pública para la Materia de Matemáticas (MAT 100). Se trata de un material pensando en los estudiantes de primer año de la carrera.

El estudiante encontrará en la presente obra una guía de ejercicio que le permitirá resolver cada ejercicio de la forma más sencilla y accesible, sin perder lógicamente los márgenes de cientificidad y profundidad, que un trabajo de esta índole requiere; entonces, les corresponderá a los lectores juzgar en qué medida se alcanzó este objetivo

Me queda, Agradecer al más grande matemático y calculador del universo, de quien sus obras combinan: razón, belleza, armonía y perfección, estoy hablando del creador "Dios" que mediante el, logremos descifrar los secretos del universo.

Sucre – Bolivia, marzo de 2022

Lic. CPA Freddy A. Camargo Chambi

Experiencia del autor en la enseñanza

Freddy Alejandro Camargo Chambi ha culminado sus estudios en Contaduría Pública de la prestigiosa Facultad de Ciencias Económicas y Financieras de la UMSA (La Paz, Bolivia).

Se ha desempeñado como auxiliar de Docencia (Previo examen de competencia) en la ***Facultad de Ciencias Económicas y Financieras UMSA, de:***

- *GABINETE DE AUDITORIA FINANCIERA*
- *CONTABILIDAD INTERNACIONAL (2 Gestiones Consecutivas)*
- *CONTABILIDAD INTERMEDIA*
- *CONTABILIDAD BÁSICA*
- *CÁLCULO I (2 Gestiones Consecutivas)*

Se ha desempeñado como auxiliar de Docencia (Previo examen de competencia) en la ***Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales USFX, de:***

- *ANÁLISIS MATEMATICO I (2 Gestiones Consecutivas)*
- *ESTADISTICA I (2 Gestiones Consecutivas)*

Como instructor en la Academia Newton*:*

- *MATEMÁTICA PREUNIVERSITARIA*
- *INTRODUCCIÓN A LA CONTABILIDAD*

Como instructor en la Academia La Paz

- *CÁLCULO I*
- *MATEMATICA FINANCIERA*
- *ESTADISTICA I y II*

Índice

La Derivada

La derivada de una **función matemática** es la razón o velocidad de cambio de una función en un determinado punto. Es decir, qué tan rápido se está produciendo una variación.

Desde una perspectiva geométrica, la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente al punto donde se ubica x.

$$f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h}$$

Teoremas para derivar funciones *sea f , g y h funciones diferenciales.*

Para funciones algebraicas

Función a derivar	*Derivada de la función*
$f_{(x)} = k\ ;\ \ k = ctte$	$f'_{(x)} = 0$
$f_{(x)} = k \cdot h_{(x)}\ \ ; k = ctte$	$f'_{(x)} = k \cdot \left[h_{(x)}\right]'$
$f_{(x)} = h_{(x)} + g_{(x)}$	$f'_{(x)} = h'_{(x)} + g'_{(x)}$
$f_{(x)} = h_{(x)} - g_{(x)}$	$f'_{(x)} = h'_{(x)} - g'_{(x)}$
$f_{(x)} = x^n$	$f'_{(x)} = nx^{n-1}$
$f_{(x)} = \left[g_{(x)}\right]^n$	$f'_{(x)} = n\left[g_{(x)}\right]^{n-1} \cdot g'_{(x)}$
$f_{(x)} = h_{(x)} \cdot g_{(x)}$	$f'_{(x)} = h'_{(x)} \cdot g_{(x)} + h_{(x)} \cdot g'_{(x)}$

$f_{(x)} = \dfrac{h_{(x)}}{g_{(x)}}$	$f'_{(x)} = \dfrac{h'_{(x)} \cdot g_{(x)} - h_{(x)} \cdot g'_{(x)}}{\left[g_{(x)}\right]^2}$

Para funciones trigonométricas

Funciones simples		*Funciones compuestas*	
Función a derivar	*Derivada de la función*	*Función a derivar*	*Derivada de la función*
$f_{(x)} = \sin x$	$f'_{(x)} = \cos x$	$f_{(x)} = \sin u$	$f'_{(x)} = \cos u \cdot u^{´}$
$f_{(x)} = \cos x$	$f'_{(x)} = -\sin x$	$f_{(x)} = \cos x$	$f'_{(x)} = -\sin u \cdot u^{´}$
$f_{(x)} = \operatorname{tg} x$	$f'_{(x)} = sec^2 x$	$f_{(x)} = \operatorname{tg} x$	$f'_{(x)} = sec^2 u \cdot u^{´}$

Para funciones exponenciales y logarítmicas

Funciones simples		*Funciones compuestas*	
Función a derivar	*Derivada de la función*	*Función a derivar*	*Derivada de la función*
$f_{(x)} = \ln x$	$f'_{(x)} = \dfrac{1}{x}$	$f_{(x)} = \ln\left[g_{(x)}\right]$	$f'_{(x)} = \dfrac{1}{g_{(x)}} \cdot g'_{(x)}$
$f_{(x)} = a^x$	$f'_{(x)} = a^x \cdot \ln a$	$f_{(x)} = a^{g_{(x)}}$	$f'_{(x)} = a^{g_{(x)}} \cdot \ln a \cdot g'_{(x)}$
$f_{(x)} = e^x$	$f'_{(x)} = e^x$	$f_{(x)} = e^{g_{(x)}}$	$f'_{(x)} = e^{g_{(x)}} \cdot g'_{(x)}$

1. $\boldsymbol{y = x^8}$

$$f_{(x)} = x^n \qquad f'_{(x)} = nx^{n-1}$$

$$y' = 8x^7$$

2. $\boldsymbol{y = \frac{1}{x^3}}$

$$\mathrm{y} = x^{-3}$$

$$y' = -3x^{-3-1}$$

$$y' = -3x^{-4}$$

3. $\boldsymbol{y = 5x^6}$

$$f(x) = k\left[\mathrm{h}_{(x)}\right] \quad f'_{(x)} = k\left[\mathrm{h}_{(x)}\right]'$$

$$y' = 5 \cdot 6x^5$$

$$y' = 30x^5$$

4. $\boldsymbol{y = \frac{3}{4x^7}}$

$$y = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x^7} \qquad\qquad y = \frac{3}{4} x^{-7}$$

$$y' = \frac{3}{4}(-7)x^{-7-1}$$

$$y' = -\frac{21}{4} x^{-8}$$

5. $\boldsymbol{y = \frac{1}{\sqrt{x}}}$

$$y = x^{-1/2}$$

$$y' = -\frac{1}{2} x^{-1/2-1}$$

$$y' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$$

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

6. $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{x^5}}$

$$y = x^{\frac{5}{3}}$$

$$y' = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}$$

$$y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

$$y' = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

7. $\boldsymbol{y = 2x^2 - 3}$

$$f_{(x)} = x^n \qquad f'_{(x)} = nx^{n-1}$$

$$f_{(x)} = k \qquad f'_{(x)} = 0$$

$$y' = 4x$$

8. $\boldsymbol{y = x^2 - 3x + 1}$

$$y' = 2x - 3$$

9. $\boldsymbol{y = 2x^3 - 6x^2 + 7x - 5}$

$$y' = 2 \cdot 3x^2 - 6 \cdot 2x + 7$$

$$y' = 6x^2 - 12x$$

10. $\boldsymbol{y = x - 3x^{-1} - 2x^{-2}}$

$$y' = 1 - 3(-1)x^{-2} - 2(-2)x^{-2-1}$$

$$y' = 1 + 3x^{-2} + 4x^{-3}$$

11.- $\boldsymbol{y = x^{-3} + 4x^{-5} - 3x^{-8}}$

$$y' = -3x^{-3-1} + 4(-5)x^{-5-1} - 3(-8)x^{-8-1}$$

$$y' = -3x^{-4} - 20x^{-6} + 24x^{-9}$$

12.- $\boldsymbol{y = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}$

$$\boldsymbol{y = 2x^{-1} - 3x^{-2}}$$

$$y' = 2(-1)x^{-1-1} - 3(-2)x^{-2-1}$$

$$y' = -2x^{-2} + 6x^{-3}$$

13. $\boldsymbol{y = x^2 + 2x - \frac{1}{x^2}}$

$$y' = 2x^{2-1} + 2 - (-2)x^{-2-1}$$

$$y' = 2x + 2 + 2x^{-3}$$

14. $\boldsymbol{y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{7}}$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot 2x - \frac{1}{7} \cdot 7x^6$$

$$y' = x - x^6$$

15. $\boldsymbol{y = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} - x^{-1}}$

$$y' = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) x^{\frac{2}{3}-1} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) x^{\frac{1}{2}-1} - (-1)x^{-1-1}$$

$$y' = x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{2}} + x^{-2}$$

16. $\boldsymbol{y = 8\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}}$

$$y' = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) x^{\frac{1}{2}-1} + \left(-\frac{1}{4}\right) x^{-\frac{1}{4}-1}$$

$$y' = 4x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}$$

$$y' = \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}$$

17. $\boldsymbol{y = (x + 4)(x + 5)}$

$$y = x^2 + 9x + 20$$

$$y' = 2x + 9$$

18. $\boldsymbol{y = x(x + 1)}$

$$y = x^2 + x$$

$$y' = 2x + 1$$

19. $\boldsymbol{y = (x^2 + 2x)(3x + 1)}$

$$y' = (x^2 + 2x)'(3x + 1) + (x^2 + 2x)(3x + 1)'$$

$$y' = (2x + 2)(3x + 1) + (x^2 + 2x)(3)$$

$$y' = 6x^2 + 2x + 6x + 2 + 3x^2 + 6x$$

$$y' = 9x^2 + 14x + 2$$

20. $\boldsymbol{y = (x+1)(x+2)(x+3)}$

$$y' = (x+1)'(x+2)(x+3) + (x+1)(x+2)'(x+3) + (x+1)(x+2)(x+3)'$$

$$y' = (x+2)(x+3) + (x+1)(x+3) + (x+1)(x+2)$$

$$y' = x^2 + 9x + 6 + x^2 + 3x + 3 + x^2 + 2x + 2$$

$$y' = 3x^2 + 14x + 11$$

21. $\boldsymbol{y = x^4 \cdot 7^x}$

$$y' = (x^4)' \cdot (7^x) + (x^4)(7^x)'$$

$$y' = 4x^3 \cdot 7^x + x^4 \cdot 7^x \cdot \ln 7$$

22. $\boldsymbol{y = \frac{x}{x^2+1}}$

$$y' = \frac{(x)'(x^2+1) - x \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$y' = \frac{x^2+1 - x(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$y' = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$y' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

23. $y = \frac{x^2}{4-x^2}$

$$y' = \frac{(x^2)' \cdot (4-x^2) - x^2 \cdot (4-x^2)'}{(4-x^2)^2}$$

$$y' = \frac{2x(4-x^2) - x^2(4-2x)}{(4-x^2)^2}$$

$$y' = \frac{8x - 2x^3 - 4x^2 + 2x^3}{(4 - x^2)^2}$$

$$y' = \frac{8\text{x} - 4x^2}{(4 - x^2)^2}$$

24. $\boldsymbol{y = \frac{x^6}{ln\, x}}$

$$y' = \frac{(x^6)'(ln\, x) - x^6 \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2}$$

$$y' = \frac{6x^5 \cdot ln\, x - x^6 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$y' = \frac{6x^5 \cdot ln\, x - x^5}{(ln\, x)^2}$$

25. $\boldsymbol{y = \frac{sin\, x}{x^4}}$

$$y' = \frac{(\sin x)'x^4 - (\sin x)(x^4)'}{(x^4)^2}$$

$$y' = \frac{\cos x \cdot x^4 - \sin x \cdot 4x^3}{x^8}$$

$$y' = \frac{x^4 \cos x - 4x^3 \sin x}{x^8}$$

26. $\boldsymbol{y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}}$

$$y' = \frac{(\sin x - \cos x)'(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{\big(\cos x - (-\sin x)\big)(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)\big(\cos x + (-\sin x)\big)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{(\sin x)^2 + 2\sin x \cdot \cos x + (\cos x)^2 + (\sin x)^2 - 2\sin x \cdot \cos x + (\cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{2[(\sin x)^2 + (\cos x)^2]}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$$

27. $\boldsymbol{y = (1 - 5x)^5}$

$$y' = 5(1 - 5x)^{5-1}(1 - 5x)'$$

$$y' = 5(1 - 5x)^4(-5)$$

$$y' = -25(1 - 5x)^4$$

28. $\boldsymbol{y = (x^2 - 2x + 6)^6}$

$$y' = 6(x^2 - 2x + 6)^{6-1}(x^2 - 2x + 6)'$$

$$y' = 6(x^2 - 2x + 6)^5(2x - 2)$$

$$y' = 12(x^2 - 2x + 6)^5(x - 1)$$

29. $\boldsymbol{y = \sqrt{x+4}}$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot (x+4)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (x+4)'$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot (x+4)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$

30. $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{x^2+3x+1}}$

$$y' = \frac{1}{3}(x^2+3x+1)^{\frac{1}{3}-1}(x^2+3x+1)'$$

$$y' = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x+3)$$

$$y' = \frac{2x+3}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$$

$$\mathbf{31}.\ \boldsymbol{y = ln\sqrt{x^2+4x+3}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}} \cdot \left(\sqrt{x^2+4x+3}\right)'$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}} \cdot \frac{\frac{I}{2\sqrt{x^2+4x+3}} \cdot (x^2+4x+3)'}{1}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}} \cdot \frac{\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+3}}}{1}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}} \cdot \frac{\frac{2(x+2)}{2\sqrt{x^2+4x+3}}}{1}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}} \cdot \frac{\frac{(x+2)}{\sqrt{x^2+4x+3}}}{1}$$

$$y' = \frac{(x+2)}{\sqrt{x^2+4x+3} \cdot \sqrt{x^2+4x+3}}$$

$$y' = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+3}^2}$$

$$y' = \frac{x+2}{x^2+4x+3}$$

32. $\boldsymbol{y = sin^5 x + ln^7 x + cos\, x^9}$

$$y' = 5(\sin x)^4(\sin x)' + 7(\ln x)^6(\ln x)' + (-\sin x^9)(x^9)'$$

$$y' = 5\sin^4 x\cos x + 7(\ln x)^6\frac{1}{x} - \sin x^9\, 9x^8$$

$$y' = 5\sin^4 x\cos x + \frac{7}{x}(\ln x)^6 - 9x^8\sin x^9$$

33. $\boldsymbol{y = e^x + e^{4x} + e^{\sin x} + e^{x^2-3x+1}}$

$$y' = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{4x}\cdot(4x)' + \mathrm{e}^{\sin x}\cdot(\sin x)' + \mathrm{e}^{x^2-3x+1}\cdot(x^2-3x+1)'$$

$$y' = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{4x}\cdot 4 + \mathrm{e}^{\sin x}\cdot\cos \mathrm{x} + \mathrm{e}^{x^2-3x+1}\cdot(2x-3)$$

$$y' = \mathrm{e}^x + 4\mathrm{e}^{4x} + \cos x\,\mathrm{e}^{\sin x} + (2x-3)\mathrm{e}^{x^2-3x+1}$$

Ejercicio 1

Un monopolista determina que si $C_{(x)}$ *es el costo total de la producción de* x *unidades de cierta mercancía, entonces* $C_{(x)} = 25x + 20000$*, la ecuación de la demanda es* $x + 50p = 5000$*, donde son demandas* x *unidades cada semana, cuando el precio unitario es de P centavos, si se desea maximizar la utilidad semana encontrar:*

a) *El número de unidades que deben producirse cada semana*
b) *El precio de cada unidad*

Solución:

a)

$$C_{(x)} = 25x + 20000$$

$x + 50p = 5000$

$50p = 5000 - x$

$p = \frac{5000}{50} - \frac{x}{50}$

$p = 100 - \frac{x}{50}$

$$I_{(x)} = p \cdot x$$

$$I_{(x)} = \left(100 - \frac{x}{50}\right) \cdot x$$

$$I_{(x)} = 100x - \frac{x^2}{50}$$

$$U_{(x)} = I_{(x)} - C_{(x)}$$

$$U_{(x)} = 100x - \frac{x^2}{50} - (25x + 20000)$$

$$U_{(x)} = 100x - \frac{x^2}{50} - 25x - 20000$$

$$U_{(x)} = -\frac{x^2}{50} + 75x - 20000$$

$$U'_{(q)} = -\frac{2x}{50} + 75$$

$$U'_{(q)} = 0$$

$$0 = -\frac{2x}{50} + 75$$

$$\frac{2x}{50} = 75$$

$$\frac{x}{25} = 75$$

$$x = 1875$$

El número de unidades que debe producirse para maximizar la utilidad es de 1875 unidades.

b)

“x ” en p

$$p = 100 - \frac{1875}{50} = 62{,}50$$

El precio que máxima la utilidad es de Bs 62,50

Ejercicio 2

Un fabricante puede producir memorias flash a un costo de Bs 20 cada una. calcular que si las vende a “$\boldsymbol{x}$” bolivianos cada una podrá vender aproximadamente 120- X memorias flash al mes. Determinar el precio de venta de “$\boldsymbol{x}$” que producirá la mayor utilidad para el fabricante.

solución:

$Cu = 20x$

$P = 120 - x$

$$U_{(x)} = I_{(x)} - C_{(x)}$$

$$U_{(x)} = p \cdot x - C_{(x)}$$

$U_{(x)} = (120 - x) \cdot x - 20x$

$U_{(x)} = 120x - x^2 - 20x$

$U_{(x)} = -x^2 + 100x$

$U'_{(x)} = -2x + 100$

$$U'_{(x)} = 0$$

$0 = -2x + 100$

$2x = +100$

$x = 50 \quad en \text{ “}p\text{”}$

$$P = 120 - 50 \qquad P = 70$$

El precio de venta que producirá la mayor utilidad es de Bs 70

Ejercicio 3

Una empresa de venta de lotes de terreno desea vender en promedio 1000 terrenos al mes a Bs 50000, la empresa piensa que se puede vender 100 terrenos adicionales al mes por cada Bs 2000 de reducción en el precio. ¿Cuál es el precio que produce el mayor ingreso?

Solución:

$q = 1000 + 100x$
$p = 50000 - 2000x$

$$I_{(x)} = p \cdot q$$

$I_{(x)} = (50000 - 2000x) \cdot (1000 + 100x)$

$I_{(x)} = 50000000 + 5000000x - 200000x - 2000000x^2$

$I_{(x)} = 50000000 + 4800000x - 2000000x^2$

$I'_{(x)} = 4800000 - 4000000x$

$$I'_{(x)} = 0$$

$0 = 4800000 - 4000000x$

$4000000x = 4800000$

$$x = 12$$

"x" en p

$p = 50000 - 2000 \cdot 12$

$$p = 26000$$

La empresa de venta de lotes debe ofrecer su terreno al precio Bs 2600 para alcanzar su máximo ingreso.

Ejercicio 4

Un fabricante ha ideado un nuevo diseño para los paneles solares colectores según los estudios de mercadotecnia que se han realizado. La demanda actual de los paneles dependerá del precio al que se venden. La función de su demanda ha sido estimada así: $q = 100000 - 200p$

a) Formular la función utilidad $U = f(q)$ que exprese la utilidad anual U en función del número de unidades "que se producen y venden.
b) Determinar el número de unidades "***q***" que deberían producirse para maximizar la utilidad anual.

c) Determinar el precio que tendra que cobrarse por cada panel para generar una demanda igual a la respuesta del inciso b)
d) Determinar la máxima utilidad anual.
e) Determinar la función Ingreso total y Costo total
f) Hallar el punto de equilibrio entre el ingreso total y costo total.

Donde "q" es el número de unidades demandadas al año y "p" representa el precio en dólares. Los estudios en ingeniería indican que el costo total de la producción de q paneles está muy bien estimado para por la función $C_{(q)} = 150000 + 100q + 0{,}003q^2$.

Solución:

a)

$$q = 100000 - 200p$$

$$200p = 100000 - q$$

$$p = \frac{100000 - q}{200}$$

$$p = \frac{100000}{200} - \frac{q}{200}$$

$$p = 500 - \frac{q}{200}$$

$$U_{(q)} = I_{(q)} - C_{(q)}$$

$$U_{(q)} = p \cdot q - C_{(q)}$$

$$U_{(q)} = \left(500 - \frac{q}{200}\right) \cdot q - (150000 + 100q + 0{,}003q^2)$$

$$U_{(q)} = 500q - \frac{q^2}{200} - 150000 - 100q + 0{,}003q^2$$

$$U_{(q)} = -0{,}008q^2 + 400q - 150000$$

$$U = f_{(q)}$$

b)

$U_{(q)} = -0{,}008q^2 + 400q - 150000$

$U'_{(q)} = -0{,}008 \cdot 2q + 400$

$U'_{(q)} = -0{,}016q + 400$

$$U'_{(q)} = 0$$

$0 = -0{,}016q + 400$

$0{,}016q = 400$

$$q = 25000$$

La empresa debe producir 25000 paneles solares para alcanzar su máxima utilidad.

c)

$q = 25000$

$p = 500 - \dfrac{q}{200}$

$p = 500 - \dfrac{25000}{200}$

$$p = 375$$

La empresa debe cobrar un precio de Bs 375 por panel solar para alcanzar su utilidad máxima.

d)

$$U_{(q)} = -0{,}008q^2 + 400q - 150000$$

$q = 25000$

$U_{(25000)} = -0{,}008(25000)^2 + 400(25000) - 150000$

$U_{(25000)} = -5000000 + 10000000 - 150000$

$$U_{(25000)} = 4850000$$

La empresa obtiene una utilidad máxima de Bs 4850000 por la venta de 25000 paneles solares.

e)

$$I_{(q)} = 500q - 0{,}005q^2$$

$$C_{(q)} = 150000 + 100q + 0{,}003q^2$$

f)

$$I_{(q)} = C_{(q)}$$

$$500q - 0{,}005q^2 = 150000 + 100q + 0{,}003q^2$$

$$150000 + 100q + 0{,}003q^2 - 500q + 0{,}005q^2 = 0$$

$$0{,}008q^2 - 400q + 150000 = 0$$

$$\underbrace{0{,}008}_{a}q^2 - \underbrace{400}_{b}q + \underbrace{150000}_{c} = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$q_1 = \frac{-(-400) + \sqrt{(-400)^2 - 4(0{,}008)(150000)}}{2 \cdot 0{,}008}$$

$$q_1 = 49622$$

$$I_{(49622)} = 500 \cdot 49622 - 0{,}005(49622)^2$$

$$I_{(49622)} = 12499286$$

$$P_{e^1}\ (49622\,;12499286)$$

$$q_2 = \frac{-(-400) - \sqrt{(-400)^2 - 4(0{,}008)(150000)}}{2 \cdot 0{,}008}$$

$$q_2 = 388$$

$$I_{(388)} = 500 \cdot 388 - 0{,}005(388)^2$$

$$I_{(388)} = 188214$$

$$P_{e^2}\ (388\,;188214)$$

Ejercicio 5

la ecuación de la demanda para cierta mercancía es $px^2 + 9p - 18 = 0$ donde p bolivianos es el precio por unidad cuando $100x$ unidades son solicitadas. Encontrar:

a) La función del precio
b) La función del ingreso marginal
c) Encontrar el ingreso total máximo

Solución:

a)

$$px^2 + 9p - 18 = 0$$

$p(x^2 + 9) - 18 = 0$

$p(x^2 + 9) = 18$

$p = \dfrac{18}{(x^2 + 9)}$

b)

$q = 100x$

$$I_{(x)} = p \cdot q$$

$$I_{(x)} = \left(\frac{18}{x^2 + 9}\right) \cdot 100x$$

$$I_{(x)} = \frac{1800x}{x^2 + 9}$$

$$I'_{(x)} = \frac{(1800x)' \cdot (x^2 + 9) - (x^2 + 9)' \cdot (1800x)}{(x^2 + 9)^2}$$

$$I'_{(x)} = \frac{1800 \cdot (x^2 + 9) - (2x) \cdot (1800x)}{(x^2 + 9)^2}$$

$$I'_{(x)} = \frac{1800x^2 + 1800 \cdot 9 - (2x) \cdot (1800x)}{(x^2 + 9)^2}$$

$$I'_{(x)} = \frac{16200 - 1800x^2}{(x^2 + 9)^2}$$

$$I'_{(x)} = \frac{1800(9 - x)^2}{(x^2 + 9)^2}$$

c)

$$I'_{(x)} = \frac{1800(9 - x)^2}{(x^2 + 9)^2}$$

$$I'_{(x)} = 0$$

$$0 = \frac{1800(9 - x)^2}{(x^2 + 9)^2}$$

$0 = 1800(9 - x)^2$

$0 = (9 - x)^2$

$\sqrt{0} = \sqrt{(9 - x)^2}$

$0 = 9 - x$

$x = 9$

La cantidad de 9 unidades máxima la utilidad

Ejercicio 6

El costo total de una firma que manufactura x bicicletas es

$C_{(x)} = \dfrac{x^3}{12} - 5x^2 + 170x + 300.$

a) ¿A qué nivel de producción decrece el costo marginal?
b) ¿A qué nivel de producción crece el costo marginal?
c) ¿Cuál es el mínimo costo marginal?

Solución:

a)

$$C_{(x)} = \frac{x^3}{12} - 5x^2 + 170x + 300$$

$C'_{(x)} = \dfrac{3x^2}{12} - 5 \cdot 2x + 170$

$C'_{(x)} = \dfrac{x^2}{4} - 10x + 170$

$$C'_{(x)} = 0$$

$$0 = \frac{x^2}{4} - 10x + 170$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-10) + \sqrt{(-10)^2 - 4(\frac{1}{4})(170)}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = i$$

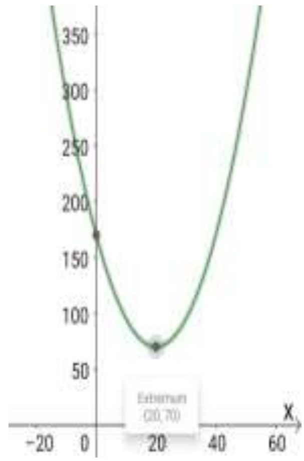
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-(-10) + \sqrt{(-10)^2 - 4(\frac{1}{4})(170)}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = i$$

Entonces resolvemos de otra forma ya que nos sale imaginario el resultado.

$$C'_{(x)} = \frac{x^2}{4} - 10x + 170$$

$$C'_{(x)} = y$$



$y = \frac{x^2}{4} - 10x + 170$ ..... *(4)*

$4y = x^2 - 40x + 680$

$4y - 680 = (x - 20)^2 - 20^2$

$4y - 280 = (x - 20)^2$

$(x - 20)^2 = 4y - 280$

$(x - 20)^2 = 4(y - 70)$

$V(h, k) = V(20{,}70)$

El nivel de producción marginal decrece $0 \leq x \leq 20$ *unidades.*

b)

$$x > 20$$

El nivel de producción marginal crece $x > 20$ *unidadades*

c)

$$C'_{(x)} = \frac{x^2}{4} - 10x + 170$$

$$x = 20$$

$$C'_{(20)} = \frac{20^2}{4} - 10 \cdot 20 + 170$$

$$C'_{(20)} = 70$$

El mínimo costo marginal es de Bs 70 produciendo una cantidad de 20 unidades

Ejercicio 7

Un fabricante de radios cobra Bs 90 por unidad cuando el costo medio de producción por unidad es de Bs 60, para seguir, sin embargo, mayores pedidos de los distribuidores, el fabricante reducirá el precio en Bs 0,10 por unidad pedida a partir de las 100 primeras. Hallar el menor pedido que podría admitir el fabricante para obtener máxima utilidad.

Solución:

$$p = 90 - 0{,}10(x - 100)$$
$$\overline{C} = 60$$
$$C_{(x)} = 60x$$

$$I_{(x)} = p \cdot x$$

$I_{(x)} = (90 - 0{,}10(x - 100)) \cdot x$

$I_{(x)} = (90 - 0{,}10x + 10) \cdot x$

$I_{(x)} = (100 - 0{,}10x) \cdot x$

$I_{(x)} = 100x - 0{,}10x^2$

$$U_{(x)} = I_{(x)} - C_{(x)}$$

$U_{(x)} = 100x - 0{,}10x^2 - 60x$

$U_{(x)} = 40x - 0{,}10x^2$

$U'_{(x)} = 40 - 0{,}20x$

$$U'_{(x)} = 0$$

$0 = 40 - 0{,}20x \qquad x = 200$

La empresa para obtener la utilidad máxima de Bs 4000 debe producir 200 unidades

Ejercicio 8

Una Empresa que fabrica y vende escritorios trabaja en competición perfecta y puede vender a un precio de Bs 200 el escritorio, todos los escritorios que produce si x escritorios se produce y se vende cada semana y $C_{(x)}$ bolivianos es el costo total de la producción semanal, entonces $C_{(x)} = x^2 + 4x + 3000$. Determine cuantos escritorios deberán fabricar por semana para que la empresa obtenga la mayor utilidad total por semana ¿Cuál es dicha utilidad total máxima por semana?

Solución:

$precio\ =\ 200$

$Se\ x:\ número\ de\ escritorios$

$C_{(x)} = x^2 + 4x + 3000$

$I_{(x)} = 200x$

$$U_{(x)} = I_{(x)} - C_{(x)}$$

$U_{(x)} = 200x - x^2 - 4x - 3000$

$U_{(x)} = -x^2 + 196x - 3000$

$U'_{(x)} = -2x + 196$

$$U'_{(x)} = 0$$

$0 = -2x + 196 \qquad x = 98$

$U_{(98)} = -98^2 + 196 \cdot 98 - 3000 = 6604$

La empresa debe fabricar 98 unidades para obtener una utilidad máxima de Bs 6604.

Ejercicio 9

En competencia perfecta, una firma puede vender a un precio de Bs 100 por unidad todo lo que produce de una cierta mercancía. Si a diario se produce x unidades, el número de bolivianos del costo total de la producción diaria, es $x^2 + 20x + 700$. Hallar el número de unidades que deben producirse diariamente para que la firma obtenga la máxima utilidad total diaria.

Solución:

$p = 100$

$$C_{(x)} = x^2 + 20x + 700$$

$I_{(x)} = p \cdot q$

$$I_{(x)} = 100 \cdot x$$

$$U_{(x)} = I_{(x)} - C_{(x)}$$

$U_{(x)} = 100x - (x^2 + 20x + 700)$

$U_{(x)} = 100x - x^2 - 20x - 700$

$U_{(x)} = -x^2 + 80x - 700$

$U'_{(x)} = -2x + 80$

$$U'_{(x)} = 0$$

$0 = -2x + 80$

$$x = 40$$

$U_{(40)} = -40^2 + 80 \cdot 40 - 700 = 900$

La empresa debe producir 40 unidades para alcanzar la máxima utilidad Bs 900.

Ejercicio 10

La función de demanda de un cierto articulo está dado por $p = (16 - x)^{\frac{1}{2}} \quad 0 \leq x \leq 16$, calcular para qué precio y cantidad el ingreso es máximo.

Solución:

$p = (16 - x)^{\frac{1}{2}}$

$$I_{(x)} = p \cdot x$$

$I_{(x)} = (16 - x)^{\frac{1}{2}} \cdot x$

$I'_{(x)} = \left[(16 - x)^{\frac{1}{2}}\right]' x + (x)'(16 - x)^{\frac{1}{2}}$

$I'_{(x)} = \left[(16 - x)^{\frac{1}{2}}\right]' x + (x)'(16 - x)^{\frac{1}{2}}$

$I'_{(x)} = \frac{1}{2}(16 - x)^{-\frac{1}{2}} \cdot x + 1 \cdot (16 - x)^{\frac{1}{2}}$

$$I'_{(x)} = -\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{16-x}} + \sqrt{16-x}$$

$$I'_{(x)} = 0$$

$$0 = -\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{16-x}} + \sqrt{16-x}$$

$$\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{16-x}} = \sqrt{16-x}$$

$$\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{16-x}} = \sqrt{16-x} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}x = \left(\sqrt{16-x}\right)^2$$

$$\frac{1}{2}x = 16 - x \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}x + x = 16$$

$$\frac{3x}{2} = 16 \quad \rightarrow \quad x = \frac{32}{3}$$

$$p = (16 - \frac{32}{3})^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad p = \left(\frac{16}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$p = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad p = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$p = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Ejercicio 11

Un fabricante de equipos de sonido estéreo determina que con el fin de vender x unidades de un nuevo modelo, el precio por unidad debe ser $p = 1000 - x$. El fabricante también determina que el costo total de producir x unidades está dado por $C_{(x)} = 3000 + 20x$.

a) Hallar el ingreso totales
b) Hallar la utilidad total
c) ¿Cuántas unidades debe producir y vender la compañía con el fin de maximizar la utilidad?
d) ¿Cuál es la utilidad máxima?
e) ¿Qué precio por unidad se debe cobrar con el fin de obtener esta utilidad máxima?

Solución:

a)

$p = 1000 - x$

$$I_{(x)} = p \cdot x$$

$I_{(x)} = (1000 - x) \cdot x$

$$I_{(x)} = 1000x - x^2$$

b)

$$U_{(x)} = I_{(x)} - C_{(x)}$$

$U_{(x)} = 1000x - x^2 - (3000 + 20x)$

$U_{(x)} = 1000x - x^2 - 3000 - 20x$

$$U_{(x)} = -x^2 + 980x - 3000$$

c)

$$U_{(x)} = -x^2 + 980x - 3000$$

$U'_{(x)} = -2x + 80$

$$U'_{(x)} = 0$$

$0 = -2x + 980$

$$x = 490$$

$U_{(490)} = -490^2 + 980 \cdot 490 - 3000$

$$U_{(490)} = 237100$$

La cantidad de 490 unidades nos proporciona una utilidad máxima de Bs 237100.

d)

$x = 490$

$p = 1000 - x$

$p = 1000 - 490$

$$p = 510$$

Al precio de Bs 510 la empresa consigue la utilidad máxima.

Problemas propuestos - Aplicaciones de la derivada

Ejercicio 1

Una mueblería vende muebles de oficina a 1200 Bs cada una, ofreciendo una rebaja de 10 Bs por cada mueble por encimas de 80 unidades que puede vender. La rebaja afecta a todas las mesas vendidas. Hallar el máximo ingreso bajo este plan de ventas.

Ejercicio 2

Un fabricante puede tener un ingreso de Bs 20 en cada artículo, si se producen semanalmente no más de 800 de artículos. La utilidad decrece a 2 centavos por artículo que sobre pasa los 800. ¿Cuantos artículos deben fabricarse a la semana para obtener un ingreso máximo?

Ejercicio 3

Una editorial de revistas vende 10000 revistas semanales cobrando a Bs 50 cada revista, si la librería quiere aumentar las ventas debe rebajar Bs 1 en cada revista para conseguir 1000 compradores más. ¿Cuál debe ser el máximo descuento en el precio de cada revista, para obtener un mayor ingreso?

Ejercicio 4

Suponiendo que la función precio está dado por $p_{(x)} = 40 - 8x$ y la función costo por $C_{(x)} = 4x + 10^{18}$ supóngase además que el gobierno grava las ventas con un impuesto de $\boldsymbol{t}$% por cada unidad.

a) determinar en términos de **t**, la cantidad de producción que maximiza la utilidad.
b) determinar también el valor de **t** que maximiza la renta del gobierno por concepto de impuesto.

Ejercicio 5

La ecuación de la demanda de cierta mercancía es $\mathrm{P} = (\mathrm{x} - 8)^2$ y la función del costo total está dado por $C_{(x)} = 18x - x^2$ donde $C_{(x)}$ bolivianos es el costo total cuando se compra x unidades.

a) Encontrar las funciones del ingreso marginal y del costo marginal.
b) Encontrar el valor de x que rinde la máxima utilidad.

Ejercicio 6

Un fabricante puede producir para camas de agua a un costo de Bs 10 cada uno, calcula que si los vende a x bolivianos cada uno podrá vender aproximadamente $50 - x$ bolivianos al mes.

a) Exprese la utilidad mensual del fabricante como una función del precio de venta x y represente gráficamente esta función de utilidad.
b) Use el cálculo para determinar el precio de venta que ha de elevar el máximo la utilidad del fabricante.

Ejercicio 7

Un fabricante de accesorios electrónicos tienen unos costos de producción diarios de $C_{(x)} = 800 - 10x + \frac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{4}}$

¿Cuantos accesorios x se habrían de producir cada día para minimizar los costos?.

Ejercicio 8

Un fabricante de radios cobra Bs 90 por unidad cuando el costo medio de producción por unidad es de Bs 60, para seguir, sin embargo, mayores pedidos de los distribuidores, el fabricante reducirá el precio en Bs 0,10 por unidad pedida a partir de las 100 primeras. Hallar el menor pedido que podría admitir el fabricante para obtener máximo.

Ejercicio 9

Suponga que en una situación de monopolio la ecuación de la demanda de cierto artículo es $p = 6 - \frac{1}{5}\sqrt{x - 100}$, donde p bolivianos es el precio por articulo cuando se demanda x artículos y $x \in [100{,}1000]$. Si $C_{(x)}$ bolivianos es el costo total de la producción de x artículos, entonces: $C_{(x)} = 2x + 100$.

a) Encuentre las funciones del ingreso marginal y del costo marginal.
b) Calcule el valor de x que arroje la máxima utilidad.

Ejercicio 10

Un fabricante en la producción de ciertos artículos, ha descubierto que la demanda del articulo viene representado por $x = \frac{2500}{p^2}$ suponiendo que el ingreso total $I_{(x)}$ esta por $I_{(x)} = xp$ que el costo de producción x artículos está dado por: $C_{(x)} = 0{,}5x + 500$, hallar el precio por unidad que de un beneficio máxima.

Ejercicio 11

Una firma de confecciones, determina que con el fin de vender x prendas , el precio por cada una debe ser $p = 150 - 0{,}5x$. también determina que el costo total de producir x prendas está dado por

$C_{(x)} = 4000 + 0{,}25x^2$.

a) Halle los ingresos totales
b) Halle la utilidad total
c) ¿Cuántos vestidos debe producir y vender la compañía con el fin de maximizar las utilidades?

INTEGRALES

Formulas básicas de integración

1.	$\int dx = x + C$
2.	$\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$
3.	$\int \left[f(x) \pm g_{(x)}\right] dx = \int f(x)\, dx \pm \int g_{(x)}\, dx$
4.	$\int u^n\, du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c \qquad ; n \neq -1$
5.	$\int \dfrac{du}{u} = ln\lvert x\rvert + c$
6.	$\int e^u\, du = e^u + c$
7.	$\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} du = \dfrac{1}{2} \arctan\left(\dfrac{u}{a}\right) + c$
8.	$\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} du = \dfrac{1}{2a} \ln\left\lvert\dfrac{u+a}{u-a}\right\rvert + c$
9.	$\int a^u\, du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c \ \ , a > 0\, , a \neq 1$

I.-Integración por tablas

$$\mathbf{1.-\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\,dx}$$

$$\int u^n\,\mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \qquad ; n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\,dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{5}}\,dx$$

$$\int x^{-\frac{1}{5}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{5}+1}}{-\frac{1}{5}+1} + c$$

$$\int x^{-\frac{1}{5}}\,dx = \frac{x^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c = 5\,\frac{x^{\frac{4}{5}}}{4} + c$$

$$\int x^{-\frac{1}{5}}\,\mathrm{d}x = 5\,\frac{\sqrt[5]{x^4}}{4} + c$$

$$\mathbf{2.-}\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{dx}$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$\int k\, f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{k}\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int u^n\,\mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \qquad ; n \neq -1$$

$$\frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \sqrt{x} + c$$

3. $-\int \sqrt{ax}\,dx$

$$\int \sqrt{ax}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{a}\cdot\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int k\,f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{k}\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \sqrt{a}\cdot\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{a}\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{a}\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int u^n\,\mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \qquad ; n \neq -1$$

$$\sqrt{a}\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{a}\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \sqrt{a}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$\int \sqrt{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{a}\cdot\sqrt{x^3} + c$$

$$\mathbf{4.-\int (3x^2 - 2x + 1)\, dx}$$

$$\int [f(x) \pm g_{(x)}]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g_{(x)}\, dx$$

$$\int (3x^2 - 2x + 1)\, dx = \int 3x^2\, dx - \int 2x\, dx + \int 1\, dx$$

$$3\frac{x^{2+1}}{2+1} - 2\frac{x^{1+1}}{1+1} + x = 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x$$

$$\int (3x^2 - 2x + 1)\, \mathrm{d}x = x^3 - x^2 + x + c$$

$$\mathbf{5.-\int (4x^3 + 3x^2 + 4x - 3)\, dx}$$

$$\int [f(x) \pm g_{(x)}]\, \mathrm{d}x = \int f(x)\, \mathrm{d}x \pm \int g_{(x)}\, \mathrm{d}x$$

$$\int (4x^3 + 3x^2 + 4x - 3)\, \mathrm{d}x$$

$$\int 4x^3\,\mathrm{d}x + \int 3x^2\,\mathrm{d}x + \int 4x\,\mathrm{d}x - \int 3\,\mathrm{d}x$$

$$4\frac{x^{3+1}}{3+1} + 3\frac{x^{2+1}}{2+1} + 4\frac{x^{1+1}}{1+1} - 3$$

$$4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^3}{3} - 3$$

$$\int (4x^3 + 3x^2 + 4x - 3)\,dx = x^4 + x^3 + x^3 - 3 + c$$

$$\mathbf{6.-}\int \left(\boldsymbol{3x^{-2} + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^{-3}}\right)\boldsymbol{dx}$$

$$\int \left(3x^{-2} + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^{-3}\right)dx$$

$$\int 3x^{-2}\,dx + \int \frac{5}{2}x^4\,dx - \int \frac{1}{2}x^{-3}\,dx$$

$$3\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \frac{5}{2}\cdot\frac{x^{4+1}}{4+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1}$$

$$3\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{5}{2}\cdot\frac{x^{5}}{5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2}$$

$$\int\left(3x^{-2}+\frac{5}{2}x^{4}-\frac{1}{2}x^{-3}\right)dx=-\frac{3}{x}+\frac{x^{5}}{2}+\frac{1}{4x^{2}}+c$$

7.– $\boldsymbol{\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[5]{x^{2}}}\right)dx}$

$$\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[5]{x^{2}}}\right)\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x-\int\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\sqrt[5]{x^{2}}}\,\mathrm{d}x$$

$$2\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x-3\int x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x+\int x^{-\frac{2}{5}}\,\mathrm{d}x$$

$$2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+3\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}-\frac{x^{-\frac{2}{5}+1}}{-\frac{2}{5}+1}$$

$$2\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}+3\frac{x^{-\frac{4}{3}}}{-\frac{4}{3}}-\frac{x^{-\frac{7}{5}}}{-\frac{7}{5}}=-4\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{3}-3\frac{x^{-\frac{4}{3}}}{4}+5\frac{x^{-\frac{7}{5}}}{7}$$

$$\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)\mathrm{d}x=-\frac{4}{3\sqrt{x^3}}-\frac{3}{4\sqrt[3]{x^4}}+\frac{5}{7\sqrt[5]{x^7}}+c$$

8.- $\boldsymbol{\int (x+3)(5x-2)\,dx}$

$$\int(5x^2-2x+15x-6)\,dx=\int(5x^2+13x-6)\,dx$$

$$=\int 5x^2\,dx+\int 13x\,dx-\int 6\,dx$$

$$=5\frac{x^{2+1}}{2+1}+13\frac{x^{1+1}}{1+1}-6x$$

$$\int(x+3)(5x-2)\,\mathrm{d}x=\frac{5}{3}x^3+\frac{13}{2}x^2-6x+c$$

$$\mathbf{9.-\int 3^x\, dx}$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{lna} + c$$

$$\int 3^x\, dx = \frac{3^x}{ln3} + c$$

$$\mathbf{10.-\int (9e^x + x)\, dx}$$

$$\int (9e^x + x)\, dx = \int 9e^x\, dx + \int x\, dx$$

$$\int e^x\, dx = e^x + c$$

$$9\int e^x\, dx + \int x\, dx = 9e^x + \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int (9e^x + x)\,\mathrm{dx} = 9e^x + \frac{x^2}{2} + c$$

$$\mathbf{11.-}\int \frac{\boldsymbol{\tan x}}{\boldsymbol{\cos x + \sin^2 x \cdot \sec x}}\,\boldsymbol{dx}$$

$$= \int \frac{\tan x}{\cos x + \sin^2 x \cdot \sec x}\,dx$$

$$= \int \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x + \sin^2 x \cdot \frac{1}{\cos x}}\,dx$$

$$\int \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x}}\,dx = \int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos x \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x)}\,dx$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + \sin^2 x}\,dx = \int \sin x\,dx$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{\tan x}{\cos x + \sin^2 x \cdot \sec x}\,dx = -\cos x + c$$

II.- Integración por sustitución o cambio de variable

Repasaremos la regla de cadena de derivación

$$[\,F \circ g]'_{(x)} = F'_{(g_{(x)})} \cdot g'_{(x)}$$

Mientras usamos esta regla bastante a menudo, mientras derivamos es necesario poder reconocer cuando una función f es el resultado de la regla de cadena aplicada a su anti derivada F . Si así fuera, la ecuación anterior nos avisa que una anti derivada de $F'_{(g_{(x)})} \cdot g'_{(x)}$ es la función compuesta $F \circ g$, por lo que podemos escribir:

$$\int f_{(g_{(x)})} \cdot g'_{(x)} dx = F_{(g_{(x)})} + c$$

Teorema Regla de Cadena

$$\int f_{(g_{(x)})} \cdot g'_{(x)} dx = F_{(g_{(x)})} + c \qquad \text{si } F' = f$$

$$\mathbf{12.-}\int \frac{\boldsymbol{2x}}{\boldsymbol{x^2-1}}\boldsymbol{dx}$$

Sea: $x^2-1=u \qquad 2xdx=du$

$$\int \frac{2xdx}{x^2-1}=\int \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{1}{u}du=ln|u|+c$$

$$\int \frac{2x}{x^2-1}dx=ln|x^2-1|+c$$

$$\mathbf{13.-}\int \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{x^3+1}}\boldsymbol{dx}$$

Sea: $x^3+1=u \qquad 3x^2dx=du \qquad x^2dx=\frac{du}{3}$

$$\int \frac{x^2dx}{x^3+1}=\int \frac{\frac{du}{3}}{u}=\frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du$$

$$\int \frac{1}{u} du = ln|u| + c$$

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} ln|x^3 + 1| + c$$

$$\mathbf{14.} - \int \boldsymbol{e^{2x}\, dx}$$

Sea: $e^{2x} = u \qquad 2e^{2x}dx = du \qquad e^{2x}dx = \frac{du}{2}$

$$\int \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int du = \frac{1}{2}u$$

$$\int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

$$\mathbf{15.-}\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

Sea: $e^x + 1 = u \qquad e^x = du$

$$\int \frac{e^x dx}{e^x+1} = \int \frac{du}{u} = ln|u| + c$$

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = ln|e^x+1| + c$$

$$\mathbf{16.-}\int 5^{4-2x}\,dx$$

Sea: $4 - 2x = u \qquad -2dx = du \qquad dx = -\frac{du}{2}$

$$\int 5^u\,dx = \frac{5^u}{ln\,5} = \frac{5^{4-2x}}{ln\,5}$$

$$\int 5^{4-2x}\,dx = \frac{5^{4-2x}}{ln\,5} + c$$

$$\mathbf{17.-\int \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x}^2 - 1)\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{dx}}$$

Sea: $x^2 - 1 = u \qquad 2x\,dx = du \qquad x\,dx = \frac{du}{2}$

$$\int \cos u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u$$

$$\int cos(x^2 - 1)x\,dx = \frac{1}{2} sin(x^2 - 1) + c$$

$$\mathbf{18.-\int \frac{\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} + 10}{\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} + 10\boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{dx}}$$

sea: $e^x + 10x = u \qquad (e^x + 10)dx = du$

$$\int \frac{(e^x + 10)dx}{e^x + 10x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u|$$

$$\int \frac{e^x + 10}{e^x + 10x}dx = ln|e^x + 10x| + c$$

$$\mathbf{19.-}\int \frac{(\boldsymbol{ln\,x})^2}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx}$$

sea: $\ln x = u \qquad \frac{1}{x}\,dx = du$

$$\int (ln\,x)^2 \cdot \frac{1}{x}dx = \int u^2 \cdot du = \frac{u^3}{3}$$

$$\int \frac{(ln\,x)^2}{x}dx = \frac{(ln\,x)^3}{3} + c$$

$$\mathbf{20.-}\int \frac{\boldsymbol{2x\,ln(x^2+1)}}{\boldsymbol{x^2+1}}\boldsymbol{dx}$$

$$sea{:}\ x^2+1=u \qquad 2xdx=du$$

$$\int \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}2x\,\mathrm{d}x=\int \frac{\ln u}{u}du$$

$$z=\ln u \qquad dz=\frac{1}{u}du$$

$$\int \ln u\cdot\frac{1}{u}du \;=\; \int z\cdot dz=\frac{z^2}{2}$$

$$\frac{z^2}{2}=\frac{(\ln u)^2}{2}=\frac{[\ln(x^2+1)]^2}{2}$$

$$\int \frac{2x\ln(x^2+1)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{[\ln(x^2+1)]^2}{2}+c$$

$$\mathbf{21.-}\int \boldsymbol{x^{2(n-\sqrt{2})\cdot(n+\sqrt{2})}\left[x^{2n^2-3}+10n^2\right]^5\,dx}$$

sea: $x^{2n^2-3}+10n^2=u \qquad \left[(2n^2-3)x^{2n^2-4}\right]dx=du$

$$\left[(2n^2-3)x^{2(n^2-2)}\right]dx=du$$

$$\left[(2n^2-3)x^{2(n-\sqrt{2})\cdot(n+\sqrt{2})}\right]dx=du$$

$$x^{2(n-\sqrt{2})\cdot(n+\sqrt{2})}\,dx=\frac{du}{2n^2-3}$$

$$\int\left[x^{2n^2-3}+10n^2\right]^5\cdot x^{2(n-\sqrt{2})\cdot(n+\sqrt{2})}\,\mathrm{d}x$$

$$\int [u]^5\frac{du}{2n^2-3}$$

$$\frac{1}{2n^2-3}\int u^5 = \frac{1}{2n^2-3}\cdot\frac{u^6}{6}$$

$$\int x^{2(n-\sqrt{2})\cdot(n+\sqrt{2})}\left[x^{2n^2-3}+10n^2\right]^5 dx = \frac{1}{2n^2-3}\cdot\frac{\left(x^{2n^2-3}+10n^2\right)^6}{6}+c$$

$$\mathbf{22.}-\int \frac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{e^{2x}+2e^x+3}}\boldsymbol{dx}$$

Sea: $e^x = u \qquad e^x dx = du$

$$\int \frac{1}{(e^x)^2+2(e^x)+3}\cdot e^x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u^2+2u+3}du$$

Completamos cuadrados

$$\int \frac{1}{(u+1)^2-1+3}du = \int \frac{1}{(u+1)^2+2}du$$

Cambio de Variable

Sea : $u+1=z \qquad du = dz$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{z^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{u+1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{e^x+1}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$$\mathbf{23.-}\int \left(\boldsymbol{e^{ax}} - \boldsymbol{e^{-ax}}\right)^2 \boldsymbol{dx}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\int \left(e^{2ax} - 2e^{ax}e^{-ax} + e^{-2ax}\right) dx$$

$$\int e^{2ax}\,dx - \int -2e^{ax}e^{-ax}\,dx + \int e^{-2ax}\,dx$$

$$\int e^{2ax}\,dx + 2\int 1\,dx + \int \frac{1}{e^{2ax}}\,dx$$

Sea: $2ax = u \qquad 2a\,dx = du \qquad dx = \frac{du}{2a}$

$$\int \mathrm{e}^{u}\frac{du}{2a} + 2x + \int \frac{1}{\mathrm{e}^{u}}\frac{du}{2a}$$

$$\frac{1}{2a}\int \mathrm{e}^{u}du + 2x + \frac{1}{2a}\int \mathrm{e}^{-u}du$$

Sea: $-u = z \qquad -du = dz$

$$\frac{1}{2a}\mathrm{e}^{u} + 2x - \frac{1}{2a}\int \mathrm{e}^{z}dz$$

$$\frac{1}{2a}\mathrm{e}^{u} + 2x - \frac{1}{2a}\mathrm{e}^{z} = \frac{1}{2a}\mathrm{e}^{2ax} + 2x - \frac{1}{2a}\mathrm{e}^{-2ax}$$

$$\frac{1}{2a}(\mathrm{e}^{2ax} - \mathrm{e}^{-2ax}) + 2x = \frac{1}{2a}\left(\mathrm{e}^{2ax} - \frac{1}{\mathrm{e}^{2ax}}\right) + 2x$$

$$\int (e^{ax} - e^{-ax})^2\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\left(\frac{\mathrm{e}^{4ax} - 1}{\mathrm{e}^{2ax}}\right) + 2x + c$$

$$\mathbf{24\,.-} \int \frac{\boldsymbol{x^2 + 3}}{\boldsymbol{x^2(x^2 + 9)}}\boldsymbol{dx}$$

$$\int \frac{3}{3} \cdot \frac{x^2 + 3}{x^2(x^2 + 9)} dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2 + 9}{x^2(x^2 + 9)} dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{2x^2 + x^2 + 9}{x^2(x^2 + 9)} dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{2x^2}{x^2(x^2 + 9)} dx + \frac{1}{3}\int \frac{x^2 + 9}{x^2(x^2 + 9)} dx$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2 + 9} dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2 + 3^2} dx + \frac{1}{3}\int x^{-2}\, dx$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}arctan\frac{x}{a} + c$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctan}\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-1}}{-1} = \frac{2}{9}\operatorname{arctan}\frac{x}{3} - \frac{1}{3x}$$

$$\int \frac{x^2+3}{x^2(x^2+9)}\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\operatorname{arctan}\frac{x}{3} - \frac{1}{3x} + c$$

$$\mathbf{25.-} \int \boldsymbol{e^{e^{e^x}} e^{e^x+x}\, dx}$$

$$\int e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x\, dx$$

Sea: $e^{e^x} = u \qquad e^{e^x} e^x dx = du$

$$\int e^u du = e^u$$

$$\int e^{e^{e^x}} e^{e^x+x}\, dx = e^{e^{e^x}} + c$$

III.- Integrales de funciones que contienen un trinomio cuadrado

1	$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$	2	$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$
3	$\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}dx$	4	$\int \frac{ax+b}{\sqrt{cx^2+dx+e}}dx$

1	$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

$$\int \frac{dx}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]}$$

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}$$

2	$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}}$$

3	$\boldsymbol{\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}dx}$

$$= \frac{a}{2c}ln|cx^2+dx+e|+\left(b-\frac{ad}{2c}\right)\int\frac{1}{cx^2+dx+e}dx$$

4	$\boldsymbol{\int \frac{ax+b}{\sqrt{cx^2+dx+e}}dx}$

$$= \frac{a}{c}\sqrt{cx^2+dx+\mathrm{e}}+\left(b-\frac{ad}{2c}\right)\int\frac{1}{\sqrt{cx^2+dx+\mathrm{e}}}dx$$

$$\mathbf{26.-}\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5x^2-20x+4}}\,\boldsymbol{dx}$$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}$$

$$=\frac{1}{5}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{-20}{2\cdot 5}\right)^2+\frac{4\cdot 5\cdot 4-(-20)^2}{4\cdot 5^2}}$$

$$\int \frac{1}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+c$$

$$\frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x-2)^2-\sqrt{\frac{16}{5}}^2}=\frac{1}{5}\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{16}{5}}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{\frac{16}{5}}}{x-2+\sqrt{\frac{16}{5}}}\right|$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\frac{8}{\sqrt{5}}} \ln \left| \frac{x - \frac{10 + 4\sqrt{5}}{5}}{x - \frac{10 - 4\sqrt{5}}{5}} \right|$$

$$\int \frac{1}{5x^2 - 20x + 4} dx = \frac{\sqrt{5}}{40} ln \left| \frac{x - \frac{10 + 4\sqrt{5}}{5}}{x - \frac{10 - 4\sqrt{5}}{5}} \right| + c$$

$$\mathbf{27.-} \int \frac{\boldsymbol{x^2 - 5x + 9}}{\boldsymbol{x^2 - 5x + 6}} \boldsymbol{dx}$$

$$= \int \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 6} dx + \int \frac{3}{x^2 - 5x + 6} dx$$

$$\int 1\, dx + 3 \int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\mathrm{d}x = \frac{1}{1}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{-5}{2}\right)^2 + \frac{4\cdot 1\cdot 6 - (-5)^2}{4\cdot 1^2}}$$

$$x + 3\int \frac{dx}{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\int \frac{1}{u^2 - a^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + c \quad si\ \ (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\ln\left|\frac{x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}}{x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}}\right| = \ln\left|\frac{x - 3}{x - 2}\right|$$

$$\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6}\mathrm{d}x = x + 3\ln\left|\frac{x - 3}{x - 2}\right| + c$$

$$\mathbf{28.-}\int \frac{\boldsymbol{x^2-3x-8}}{\boldsymbol{x^2-2x+1}}\boldsymbol{dx}$$

$$=\int \frac{x^2-2x-x+1-9}{x^2-2x+1}dx$$

$$=\int \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+1}dx+\int \frac{-x-9}{x^2-2x+1}dx$$

$$=\int 1\,dx-\int \frac{x+9}{x^2-2x+1}dx$$

$$\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}dx=\frac{a}{2c}ln|cx^2+dx+e|+\left(b-\frac{ad}{2c}\right)\int \frac{1}{cx^2+dx+e}dx$$

$$\int \frac{x+9}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x=\ \frac{1}{2}ln|x^2-2x+1|+\left(9-\frac{-2}{2}\right)\int \frac{1}{x^2-2x+1}dx$$

$$=x+\frac{1}{2}ln(x-1)^2+10\int \frac{1}{x^2-2x+1}dx$$

$$= x + \frac{2}{2} ln(x-1) + 10 \int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

Sea : $\quad x - 1 = u \quad dx = du$

$$= x + ln(x-1) + 10 \int \frac{dx}{u^2}$$

$$= x + ln(x-1) + 10 \int u^{-2}\, dx$$

$$= x + ln(x-1) + 10 \frac{u^{-1}}{-1} = ln(x-1) - 10 \frac{1}{u}$$

$$\int \frac{x^2 - 3x - 8}{x^2 - 2x + 1} dx = x - \frac{10}{x-1} - ln(x-1) + c$$

IV.-Integración por partes

Comencemos con la regla de multiplicación:

$$[\, f \cdot g \,]'_{(x)} = f'(x) \cdot g\,(x) + f\,(x) \cdot g'(x)$$

Y si integramos ambos lados de esta ecuación tenemos:

$$\int [\, f \cdot g \,]'_{(x)}\, dx = \int f'(x) \cdot g\,(x)\, dx + \int f\,(x) \cdot g'(x)\, dx$$

Como los procesos de integrar y derivar son inversos, uno del otro, vemos que en el lado derecho de esta función solo nos queda $[\, f \cdot g \,]_{(x)}$, por lo tanto:

$$[\, f \cdot g \,]_{(x)} = \int f'(x) \cdot g\,(x)\, dx + \int f\,(x) \cdot g'(x)\, dx$$

$$f_{(x)} \cdot g_{(x)} = \int f'(x) \cdot g\,(x)\, dx + \int f\,(x) \cdot g'(x)\, dx$$

Por lo tanto, despejando $\int f'(x) \cdot g\,(x)\, \mathrm{d}x$, tenemos:

$$\int f\,(x) \cdot g'(x)\, dx = f_{(x)} \cdot g_{(x)} - \int f'(x) \cdot g\,(x)\, dx$$

Esta fórmula es llamada **fórmula de integración por partes**.

Lo podemos interpretar de la siguiente manera: si tienes una función f multiplicada por la derivada de otra función g entonces la integral de esta multiplicación es igual a multiplicación de f por g (ninguna derivada) menos la integral de la multiplicación de la derivada de f por la función g.

Podemos ver que esta fórmula tiene integrales en ambos lados, pero, si la integral de la derecha es más simple, entonces esta fórmula sirve para despedazar, un poco, una integral difícil y llevarnos a resolver otra integral que podemos resolver más fácilmente por algún otro método.

Existe también una manera más simple de recordar esta fórmula, si hacemos las siguientes sustituciones:

$$u = f_{(x)}\ , \quad u = f_{(x)} \quad \text{y por lo tanto:} \quad dv = g^{'}(x)\, dx$$

Entonces podemos escribir,

$$du = f^{'}(x)dx \qquad\qquad v = g_{(x)}$$

y la fórmula de integración por partes se transforma en:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

El problema de elegir "u" y "dv" ,por lo cual utilizaremos la siguiente identificación **ILATE**

I=función trigonométrica inversa.

L=función logarítmica.

A=función algebraica.

T= función trigonométrica.

E=función Exponencial

$$\mathbf{29.-}\int \boldsymbol{ln\,x\,dx}$$

$$\begin{array}{c} \text{I L A T E} \\ \big\downarrow \\ \ln x \end{array}$$

$$\boldsymbol{u = ln\,x} \qquad \boldsymbol{dv = dx}$$

$$\boldsymbol{du = \frac{1}{x}dx} \qquad \int d\,v = \int dx$$

$$\boldsymbol{v = x}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v du$$

$$\int ln\,x\,dx = x\,ln\,x - \int x\frac{1}{x}dx$$

$$\int ln\,x\,dx = x\,ln\,x - \int 1dx$$

$$\int ln\,x\,dx = x\,ln\,x - x + c$$

$$\mathbf{30\,.-\int x^2\,ln\,x\,dx}$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{I} & \text{L} & \text{A} & \text{T} & \text{E} \\ & \downarrow & \searrow & & \\ & \ln x & x^2 & & \end{array}$$

$$\boldsymbol{u = ln\,x} \qquad \boldsymbol{dv = x^2}$$

$$\boldsymbol{du = \frac{1}{x}dx} \qquad \int d\,v = \int x^2dx \qquad \boldsymbol{v = \frac{x^3}{3}}$$

$$\int u\,dv = uv - \int vdu$$

$$\int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx$$

$$\int x^2 \ln x \,dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\int x^2\,dx$$

$$\int x^2 \ln x \,dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 \ln x \,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$$

$$\mathbf{31.-}\int \boldsymbol{x\,e^x\,dx}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{I} & \mathrm{L} & \mathrm{A} & \mathrm{T} & \mathrm{E} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & x & & e^x \end{array}$$

$$\boldsymbol{u} = x \qquad \boldsymbol{dv = e^x}$$

$$\boldsymbol{du = dx} \qquad \int d\,v = \int e^x dx \qquad \boldsymbol{v = e^x}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v du$$

$$\int x\,e^{x}\,\mathrm{dx} = x\,e^{x} - \int e^{x}dx$$

$$\int x\,e^{x}\,\mathrm{dx} = x\,e^{x} - e^{x}$$

$$\int x\,e^{x}\,\mathrm{dx} = e^{x}(x-1) + c$$

$$\mathbf{32.-}\int \boldsymbol{ln}\left(\boldsymbol{x}+\sqrt{\boldsymbol{x}^{2}-\mathbf{1}}\right)\boldsymbol{dx}$$

I L A T E

$$ln\left(x+\sqrt{x^{2}-1}\right)$$

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{ln}\left(\boldsymbol{x}+\sqrt{\boldsymbol{x}^{2}-\mathbf{1}}\right) \qquad \boldsymbol{dv} = \boldsymbol{dx}$$

$$\int dv = \int dx$$

$$\boldsymbol{v = x}$$

$$du = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)'}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1 + \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)'}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$du = \frac{1 + \dfrac{(x^2 - 1)'}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$du = \frac{\dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}dx$$

$$\boldsymbol{du = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}}$$

$$\int u\,dv = uv - \int vdu$$

$$\int ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)dx = ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)x - \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Sea: $x^2 - 1 = u$ $\quad 2xdx = du$ $\quad xdx = \frac{du}{2}$

$$\int ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx$$

$$= ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)x - \int \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{du}{2}$$

$$\int ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx = ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)x - \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$\int ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx = ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)x - \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$\int ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx = x\,ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \sqrt{x^2-1} + c$$

33 .– $\boldsymbol{\int x^3 e^{-x^2}\,dx}$

$$\text{Sea}: \; -x^2 = n \quad xdx = dn \qquad xdx = -\frac{dn}{2}$$

$$x^2 = -n$$

$$\int x^2 e^{-x^2} x\,\mathrm{dx} = \int (-n)\cdot e^n \cdot \left(-\frac{dn}{2}\right) = \frac{1}{2}\int ne^n dn$$

$$= \frac{1}{2}\int ne^n dn$$

I L A T E

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ n & e^n \end{array}$$

$$\boldsymbol{u = n} \qquad \boldsymbol{dv = e^n}$$

$$\boldsymbol{du = dn} \qquad \int d\,v = \int e^n dx \qquad \boldsymbol{v = e^n}$$

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int vdu$$

$$\frac{1}{2}\int ne^n dn = \frac{1}{2}\left[ne^n - \int e^n dn\right]$$

$$\frac{1}{2}\int ne^n dn = \frac{1}{2}[ne^n - e^n]$$

$$\int x^3 e^{-x^2}\,dx = -\frac{e^{-x^2}}{2}[x^2 + 1] + c$$

$$\mathbf{34.-}\int (\boldsymbol{x^2 - 2x + 5)e^{-x}\,dx}$$

I L A T E

$$x^2 - 2x + 5 \qquad e^{-x}$$

$$\boldsymbol{u = x^2 - 2x + 5} \qquad \boldsymbol{dv = e^{-x}}$$

$$\boldsymbol{du = 2(x-1)dx} \qquad \int d\,v = \int e^{-x} dx$$

$$\boldsymbol{v = -e^{-x}}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v du$$

$$= -(x^2 - 2x + 5)e^{-x} - \int -e^{-x} 2(x-1)dx$$

$$= -(x^2 - 2x + 5)e^{-x} + 2\int e^{-x}(x-1)dx$$

$$= -(x^2 - 2x + 5)e^{-x} + 2\int (e^{-x}x - e^{-x})dx$$

$$= -(x^2 - 2x + 5)e^{-x} + 2\left[\int e^{-x}\, x\, dx - \int e^{-x} dx\right]$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{I} & \text{L} & \text{A} & \text{T} & \text{E} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & x & & e^{-x} \end{array}$$

Sea:

$$\boldsymbol{u = x} \qquad\qquad \boldsymbol{dv = e^{-x} dx}$$

$$\boldsymbol{du = dx} \qquad\qquad \int d\,v = \int e^{-x} dx \qquad \boldsymbol{v = -e^{-x}}$$

$$\int u\, dv = uv - \int v du$$

$$= -(x^2 - 2x + 5)e^{-x}$$

$$+ 2\left[\left(-xe^{-x} - \int -e^{-x} dx\right) - \int e^{-x} dx\right]$$

$$= -(x^2 - 2x + 5)e^{-x}$$

$$+ 2\left[-xe^{-x} + \int e^{-x}dx - \int e^{-x}dx\right]$$

$$= -(x^2 - 2x + 5)e^{-x} - 2xe^{-x}$$

$$= -e^{-x}(x^2 - 2x + 5 + 2x)$$

$$= -e^{-x}(x^2 + 5)$$

$$\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x}\, dx = -e^{-x}(x^2 + 5) + c$$

$$\mathbf{35.-}\int \boldsymbol{e^{ax}\cos bx\,dx}$$

I L A T E

$$\cos bx \qquad e^{ax}$$

$$\boldsymbol{u = \cos bx} \qquad\qquad \boldsymbol{dv = e^{ax}dx}$$

$$\boldsymbol{du = -b\sin bx\,dx} \qquad\qquad \int d\,v = \int e^{ax}dx$$

$$Sea:\ r = ax \quad dr = adx \quad \frac{dr}{a} = dx$$

$$v = \int e^{r}\,\frac{dr}{a} \qquad v = \frac{e^{r}}{a} \qquad \boldsymbol{v = \frac{e^{ax}}{a}}$$

$$\int u\,dv = uv - \int vdu$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \cos bx\cdot\frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} - b\sin bx\,dx$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \cos bx\cdot\frac{e^{ax}}{a}+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

I L A T E

$\sin bx$ $\qquad$ e^{ax}

$$\boldsymbol{u=\sin bx} \qquad \boldsymbol{dv=e^{ax}dx}$$

$$\boldsymbol{du=b\cos bx\,dx} \qquad \int dv=\int e^{ax}dx$$

$$\boldsymbol{v=\frac{e^{ax}}{a}}$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\sin bx\frac{e^{ax}}{a}-\int\frac{e^{ax}}{a}b\cos bx\,dx$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$=\cos bx\cdot\frac{e^{ax}}{a}+\frac{b}{a}\left[\sin bx\frac{e^{ax}}{a}-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx\right]$$

$$=\cos bx\cdot\frac{e^{ax}}{a}+\frac{b}{a}\sin bx\frac{e^{ax}}{a}-\frac{b}{a}\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$= \cos bx \cdot \frac{e^{ax}}{a} + \frac{be^{ax}}{a^2} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, \mathrm{d}x + \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

$$= \cos bx \cdot \frac{e^{ax}}{a} + \frac{be^{ax}}{a^2} \sin bx$$

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \int e^{ax} \cos bx \, dx = \cos bx \cdot \frac{\boldsymbol{e^{ax}}}{\boldsymbol{a}} + \frac{b\boldsymbol{e^{ax}}}{\boldsymbol{a^2}} \sin bx$$

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2}\right) \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a} \left(\cos bx + \frac{b}{a} \sin bx\right)$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a} \left(\cos bx + \frac{b}{a} \sin bx\right) \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2}\right)$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = e^{ax} \left(\cos bx + \frac{b}{a} \sin bx\right) \left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right)$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + c$$

$$\mathbf{36.-} \int \boldsymbol{x\sqrt{1+x}\,dx}$$

I L A T E

$\downarrow$

x

$$\boldsymbol{u = x} \qquad \boldsymbol{dv = \sqrt{1+x}dx}$$

$$\boldsymbol{du = dx} \qquad \int d\,v = \int \sqrt{1+x}\,dx$$

$$Sea\text{: } r = \sqrt{1+x} \qquad dr = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx \qquad 2\,r\,dr = dx$$

$$v = \int r\,2r\,dr$$

$$v = 2\int r^2\,dr \qquad \boldsymbol{v = 2\frac{\sqrt{1+x}^3}{3}}$$

$$\int u\,dv = uv - \int vdu$$

$$\int x\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x = x \cdot 2\,\frac{\sqrt{1+x}^{3}}{3} - \int 2\,\frac{\sqrt{1+x}^{3}}{3}\,dx$$

$$\int x\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x\sqrt{1+x}^{3} - \frac{2}{3}\int \sqrt{1+x}^{3}\,dx$$

Sea: $u = 1 + x \qquad du = dx$

$$\int u^{\frac{3}{2}}dx = 2\,\frac{u^{\frac{5}{2}}}{5} \quad = 2\,\frac{(1+x)^{\frac{5}{2}}}{5}$$

$$\int \sqrt{1+x}^{3}\,dx = 2\,\frac{(1+x)^{\frac{5}{2}}}{5}$$

$$\int x\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x\sqrt{1+x}^{3} - \frac{2}{3}\left(2\,\frac{(1+x)^{\frac{5}{2}}}{5}\right)$$

$$\int x\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x\sqrt{1+x}^{3} - \frac{4}{15}\sqrt{1+x}^{5} + c$$

$$\mathbf{37.-}\int \frac{\boldsymbol{x^2}}{\sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{dx}$$

I L A T E

$$\downarrow$$

$$x^2$$

$$\boldsymbol{u = x^2} \qquad \boldsymbol{dv = \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx}$$

$$\boldsymbol{du = 2xdx} \qquad \int d\,v = \int \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx$$

$$\boldsymbol{v = 2\sqrt{1+x}}$$

$$\int u\,dv = uv - \int vdu$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx = x^2 2\sqrt{1+x} - \int 2\sqrt{1+x}\,2xd\boldsymbol{x}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx = 2x^2\sqrt{1+x} - 4\int \sqrt{1+x}\cdot x\,dx$$

$$\int \sqrt{1+x} \cdot x\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{1+x}^3 - \frac{4}{15}\sqrt{1+x}^5$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$$

$$= 2x^2\sqrt{1+x}$$

$$-4\left[\frac{2}{3}x\sqrt{1+x}^3 - \frac{4}{15}\sqrt{1+x}^5\right]$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx = 2x^2\sqrt{1+x} - \frac{8}{3}x\sqrt{1+x}^3 + \frac{16}{15}\sqrt{1+x}^5 + c$$

$$\mathbf{38.-}\int \sqrt{\boldsymbol{a^2 - x^2}}\,\boldsymbol{dx}$$

$$\boldsymbol{u = \sqrt{a^2 - x^2}} \qquad \boldsymbol{dv = dx}$$

$$du = \frac{\left(a^2-x^2\right)'}{2\sqrt{a^2-x^2}} \qquad \int d\,v = \int\ dx$$

$$du = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} \qquad \boldsymbol{v = x}$$

$$\boldsymbol{du = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v du$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int x \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$\int \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$-\int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$-\int \frac{a^2 - x^2}{\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\,dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$-\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}\, dx = arcsin\frac{u}{a} + c$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = -\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + a^2\, arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$+ a^2\, arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\, arcsin\frac{x}{a}$$

$$2\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\, arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + c$$

$$\mathbf{39.-} \int \sqrt{\boldsymbol{a^2 + x^2}}\,\boldsymbol{dx}$$

$$\boldsymbol{u = \sqrt{a^2 + x^2}} \qquad \boldsymbol{dv = dx}$$

$$du = \frac{(a^2+x^2)'}{2\sqrt{a^2+x^2}} \qquad \int d\,v = \int\ dx$$

$$du = \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} \qquad \boldsymbol{v = x}$$

$$\boldsymbol{du = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx}$$

$$\int u\,dv = uv - \int vdu$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int x\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \int \frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$

$$\int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx + \int \frac{-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$\int \frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}dx - a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\ dx - a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$
$$= \int \sqrt{a^2+x^2}\ dx - a^2\ ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2}$$

$$-\left[\int \sqrt{a^2+x^2}\;dx - a^2\,ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|\right]$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx + \int \sqrt{a^2+x^2}$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2}\; + a^2\,ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|$$

$$2\int \sqrt{a^2+x^2} = x\sqrt{a^2+x^2}\; + a^2\,ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2} = \frac{x\sqrt{a^2+x^2}\; + a^2\,ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|}{2}$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}\; + \frac{a^2}{2}\,ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + c$$

Problemas propuesto integrales

$$\mathbf{1.-}\int x\,dx$$

$$\mathbf{2.-}\int x^{10}\,dx$$

$$\mathbf{3.-}\int \sqrt[3]{x}\,dx$$

$$\mathbf{4.-}\int \frac{1}{x^3}\,dx$$

$$\mathbf{5.-}\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\,dx$$

$$\mathbf{6.-}\int 3\,dx$$

$$\mathbf{7.-}\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$\mathbf{8.-}\int \sqrt{ax}\,dx$$

$$9.-\int 4\sin x\,dx$$

$$10.-\int (3x^2-2x+1)\,dx$$

$$11.-\int (4x^3+3x^2+4x-3)\,dx$$

$$12.-\int \left(x^2+x\cdot\sqrt{x}\right)dx$$

$$13.-\int \frac{3x^3-\sqrt{x}}{x}\,dx$$

$$14.-\int \left(3x^{-2}+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^{-3}\right)dx$$

$$15.-\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)dx$$

$$16.-\int (x+3)(5x-2)\,dx$$

$$\mathbf{17.-}\int\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)^2 dx$$

$$\mathbf{18.-}\int\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)^2 dx$$

$$\mathbf{19.-}\int 3^x\, dx$$

$$\mathbf{20.-}\int (9e^x+x)\, dx$$

$$\mathbf{21.-}\int \frac{\tan x}{\cos x+\sin^2 x\cdot \sec x}\, dx$$

$$\mathbf{22.-}\int \frac{1}{x^2+49}\, dx$$

$$\mathbf{23.-}\int \frac{x^3+x+1}{1+x^2}\, dx$$

$$\mathbf{24.-}\int \frac{1}{(x+1)^4}\, dx$$

$$\mathbf{25.} - \int \frac{x-3}{x^2-9}\,dx$$

$$\mathbf{26.} - \int \frac{2x}{x^2-1}\,dx$$

$$\mathbf{27.} - \int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$$

$$\mathbf{28.} - \int \sqrt[6]{x^3+1}\cdot x^2\,dx$$

$$\mathbf{29.} - \int e^{2x}\,dx$$

$$\mathbf{30.} - \int \frac{e^{\frac{3}{x}}}{x^2}\,dx$$

$$\mathbf{31.} - \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

$$\mathbf{32.} - \int 2^{x+3}\,dx$$

$$\mathbf{33.-}\int \mathbf{5^{4-2x}}\,d\boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{34.-}\int \boldsymbol{cos(x^2-1)x}\,d\boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{35.-}\int \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+7}}}\,d\boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{36.-}\int \boldsymbol{e^{\sin x}\cos x}\,d\boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{37.-}\int \frac{\boldsymbol{e^x+10}}{\boldsymbol{e^x+10x}}\,d\boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{38.-}\int \boldsymbol{x\cos x^2}\,d\boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{39.-}\int \frac{\boldsymbol{sec^2x}}{\boldsymbol{10+\tan x}}\,d\boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{40.-}\int \frac{\boldsymbol{(\ln x)^2}}{\boldsymbol{x}}\,d\boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{41.} - \int \frac{2x\,ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx$$

$$\mathbf{42.} - \int \frac{e^{x^2+x}}{e^{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathbf{43.} - \int x^{2(n-\sqrt{2})\cdot(n+\sqrt{2})}\left[x^{2n^2-3}+10n^2\right]^5\,\mathrm{d}x$$

$$\mathbf{44.} - \int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+3}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathbf{45.} - \int \frac{\sqrt{x+2}}{x+3}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathbf{46.} - \int \frac{x^3-2x+6}{x^2+2x-1}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathbf{47.} - \int (e^{ax}-e^{-ax})^2\,\mathrm{d}x$$

48.– $$\int \frac{x^2+3}{x^2(x^2+9)}\,dx$$

49.– $$\int \frac{1}{x(x^7+1)}\,dx$$

50.– $$\int e^{e^{e^x}} e^{e^x+x}\,dx$$

51.– $$\int \frac{2x+5}{x^2+2x+5}\,dx$$

52.– $$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$$

53.– $$\int \frac{1}{5x^2-20x+4}\,dx$$

54.– $$\int \frac{1}{x^2-2x+4}\,dx$$

55.– $$\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$$

$$56.-\int \frac{x^2-3x-8}{x^2-2x+1}\,dx$$

$$57.-\int x\cos x\,dx$$

$$58.-\int \ln x\,dx$$

$$59.-\int x^2\ln x\,dx$$

$$60.-\int x\,e^x\,dx$$

$$61.-\int x^2\,5^x\,dx$$

$$62.-\int \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx$$

$$63.-\int x^3e^{-x^2}\,dx$$

$$64.-\int (x^2-2x+5)e^{-x}\,dx$$

$$\mathbf{65.-}\int \boldsymbol{e^{ax}\cos bx}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{66.-}\int \boldsymbol{x\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{67.-}\int \frac{\boldsymbol{x^2}}{\sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{68.-}\int \sqrt{\boldsymbol{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\mathbf{69.-}\int \sqrt{\boldsymbol{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

V.- Aplicación de la integral indefinida en problemas de administración y Economía

Ejercicio 1

La función de costo marginal de una empresa es:

$C'(x) = 30 - 0{,}05x$

a) *Determinar la función de costo* $C'(x)$*, si los costos fijos de la empresa son de Bs 2000 por mes.*
b) *¿Cuántos costara producir 150 unidades en un mes?*

Solución:

a) $CF = 2000$
$C'(x) = 30 - 0{,}05x$

$$\int C'(x)\,dx = \int (30 - 0{,}05x)\,dx$$

$$\int (30 - 0{,}05x)\,dx = \int 30\,dx - \int 0{,}05x\,dx$$

$$30\int dx - 0{,}05\int x\,dx = 30x - 0{,}05\frac{x^2}{2}$$

$$\int (30 - 0{,}05x)\,dx = 30x - 0{,}025x^2 + c$$

$CF = c = 2000$

$$C_{(x)} = -0{,}025x^2 + 30x + 2000$$

b)

$x = \ 150$

$$C_{(150)} = -0{,}025(150)^2 + 30(150) + 2000$$

$$C_{(150)} = -0{,}025(150)^2 + 30(150) + 2000$$

$$C_{(150)} = 5937{,}50$$

Ejercicio 2

El costo marginal de cierta empresa de producir ABC es $C'(x) = 3 - 0{,}001x$ y el costo de fabricar 100 unidades es de Bs 995 ¿Cuál es el costo de producir 200 unidades?

Solución:

$C'(x) = 3 - 0{,}001x$

$$\int C'(x)\,dx = \int (3 - 0{,}001x\,)\,dx$$

$$\int 3\,dx - \int 0{,}001x\,dx = 3\int dx - 0{,}001\int x\,dx$$

$$3x - 0{,}001\frac{x^2}{2} = 3x - 0{,}0005x^2 + c$$

$$C_{(x)} = 3x - 0{,}0005x^2 + c$$

$C_{(100)} = 995$

$$C_{(100)} = 3 \cdot 100 - 0{,}0005(100)^2 + c$$

$$C_{(100)} = 300 - 5 + c$$

$$995 = 295 + c$$

$$C = 700$$

$$C_{(x)} = 3x - 0{,}0005x^2 + 700$$

$C_{(200)} = ?$

$$C_{(200)} = 3 \cdot 200 - 0{,}0005(200)^2 + 700$$

$$C_{(200)} = 3 \cdot 200 - 0{,}0005(200)^2 + 700$$

$$C_{(200)} = 1280$$

Ejercicio 3

Una función de costó marginal está definido por:
$C'(x) = 3x^2 + 8x + 4$ y el costo fijo es de Bs 6. Determinar la función costó total correspondiente.

Solución:

$C'(x) = 3x^2 + 8x + 4$

$$\int C'(x)\,dx = \int (3x^2 + 8x + 4\,)\,dx$$

$\int 3x^2\,dx + \int 8x\,dx + \int 4\,dx = 3\int x^2\,dx + 8\int x\,dx + 4\int dx$

$3\dfrac{x^3}{3} + 8\dfrac{x^2}{2} + 4x = x^3 + 4x^2 + 4x$

$$C_{(x)} = x^3 + 4x^2 + 4x + c$$

$CF = c = 6$

$$C_{(x)} = x^3 + 4x^2 + 4x + 6$$

Ejercicio 4

La gerencia de una división de DITTON INDUSTRIES ha determinado que la función de costó marginal diario asociado con la producción de máquinas para la preparación de palomitas de maíz está dado por: $C^{´}(x) = 0{,}00003x^2 - 0{,}03x + 10$,dónde $C^{´}(x)$ se mide en bolivianos por unidades y x denota la unidades de fabricadas.

La gerencia también a determinados los gastos fijos diarios relacionados con la producción de estas máquinas ascienden a Bs 600. más los gastos totales de DITTON, relacionadas con la producción de la primera 500 máquinas de este tipo.

Solución:

$C^{´}(x) = 0{,}00003x^2 - 0{,}03x + 10$

$$\int C^{´}(x)\,dx = \int (0{,}00003x^2 - 0{,}03x + 10\,)\,dx$$

$$\int 0{,}00003x^2\,dx - \int 0{,}03x\,dx + \int 10\,dx$$

$$0{,}00003\int x^2\,dx - 0{,}03\int x\,dx + 10\int dx$$

$$0{,}00003\frac{x^3}{3} - 0{,}03\frac{x^2}{2} + 10x$$

$$C_{(x)} = 0{,}00001x^3 - 0{,}015x^2 + 10x + c$$

$CF = 600$

$$C_{(x)} = 0{,}00001x^3 - 0{,}015x^2 + 10x + 600$$

$C_{(500)} = ?$

$$C_{(500)} = 0{,}00001(500)^3 - 0{,}015(500)^2 + 10(500) + 600$$

$$C_{(500)} = 3100$$

Ejercicio 5

Un fabricante encontrado que el costo marginal es: $C^{\prime}(x) = 6x + 1$ bolivianos por unidad cuando se ha producido x unidades. El costo total (incluyendo gastos generales) de producción de la primera unidad es de Bs 130.

¿Cuál es el costo de producción de las primeras 10 unidades?

Solución:

$C^{\prime}(x) = 6x + 1$

$$\int C^{\prime}(x)\,dx = \int (6x + 1)\,dx$$

$$\int 6x\,dx + \int 1\,dx = 6\int x\,dx + \int dx$$

$$6\frac{x^2}{2} + x = 3x^2 + x$$

$$C_{(x)} = 3x^2 + x + CF$$

$C_{(1)} = 130$

$$C_{(1)} = 3 \cdot 1^2 + 1 + CF$$

$$130 = 3 \cdot 1^2 + 1 + CF$$

$$CF = 126$$

$$C_{(x)} = 3x^2 + x + 126$$

$C_{(10)} = ?$

$$C_{(10)} = 3(10)^2 + 10 + 126$$

$$C_{(10)} = 426$$

Ejercicio 6

Un fabricante ha determinado que la función de costó marginal es: $C^{´}(x) = 0{,}003x^2 - 0{,}4x + 40$,donde x es el número de producidas. Si el costo marginal es de Bs 2750 cuando $x = 50$ y los costos fijos es de Bs 5000. ¿Cuál es el costo promedio de producir 100 unidades?

Solución:

$C^{´}(x) = 0{,}003x^2 - 0{,}4x + 40$

$$\int C^{´}(x)\,dx = \int (0{,}003x^2 - 0{,}4x + 40)\,dx$$

$$\int 0{,}003x^2\,dx - \int 0{,}4x\,dx + \int 40\,dx$$

$$0{,}003 \int x^2\,dx - 0{,}4 \int x\,dx + 40 \int dx$$

$$\int C'(x)\,dx = 0{,}003\,\frac{x^3}{3} - 0{,}4\,\frac{x^2}{2} + 40x + c$$

$CF = C = 2750$

$$C_{(x)} = 0{,}001x^3 - 0{,}2x^2 + 40x + 2750$$

$$\frac{C_{(x)}}{x} = \frac{0{,}001x^3}{x} - \frac{0{,}2x^2}{x} + \frac{40x}{x} + \frac{2750}{x}$$

$$\overline{C_{(x)}} = \frac{0{,}001x^3}{x} - \frac{0{,}2x^2}{x} + \frac{40x}{x} + \frac{2750}{x}$$

$$\overline{C_{(x)}} = 0{,}001x^2 - 0{,}2x + 40 + \frac{2750}{x}$$

$x = 100$

$$\overline{C_{(100)}} = 0{,}001(100)^2 - 0{,}2(100) + 40 + \frac{2750}{100}$$

$$\overline{C_{(100)}} = 80$$

Ejercicio 7

Supongo que la función de costó marginal para el producto de un fabricante está dado por: $\frac{dc}{dx} = \frac{100x^2-4998x+50}{x^2-50x+1}$,donde c se es el costo total en bolivianos cuando se producen x unidades.

a) Determinar costo marginal cuando se producen 50 unidades.
b) Si los costos fijos son de 10000, encuentre el costo total de producir 50 unidades.

Solución:

a) $C'(50) =?$

$$C'(50) = \frac{100(50)^2 - 4998(50) + 50}{50^2 - 50(50) + 1}$$

$$C'(50) = 150$$

b)

$$\int C'(x)\,dx = \int \frac{100x^2 - 4998x + 50}{x^2 - 50x + 1} dx$$

$$\int \frac{100x^2 - 4998x + 50}{x^2 - 50x + 1} - 100 + 100\,dx$$

$$\int \frac{100x^2 - 4998x + 50 - 100x^2 + 5000x - 100}{x^2 - 50x + 1} + 100\,dx$$

$$\int \frac{2x - 50}{x^2 - 50x + 1} + 100\,dx$$

$$\int \frac{2x - 50}{x^2 - 50x + 1}\,dx + \int 100\,dx$$

CV sea : $u = x^2 - 50x + 1 \quad du = 2x - 50$

$$\int \frac{1}{u}\,du + 100x = \ln u + 100x + CF$$

$CF = 10000$

$$C_{(x)} = \ln|x^2 - 50x + 1| + 100x + 10000$$

$x = 50$

$$C_{(50)} = \ln|50^2 - 50 \cdot 50 + 1| + 100 \cdot 50 + 10000$$

$$C_{(50)} = 15000$$

Ejercicio 8

El costo marginal de una empresa en el nivel de producción de x unidades es: $C´(x) = \frac{x^2}{50} - 2x + 107$ y los costos fijos de producción son Bs 2000.

a) Calcula la función de costó total.
b) halle el costo actual de producir una unidad incremental después de haber producido 30 unidades.

Solución:

a) $C´(x) = \frac{x^2}{50} - 2x + 107 \quad CF = 2000$

$$\int C´(x)\,dx = \int \left(\frac{x^2}{50} - 2x + 107\right) dx$$

$$= \frac{1}{50}\int x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 107\,dx$$

$$= \frac{1}{50}\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 107x$$

$$C_{(x)} = \frac{x^3}{150} - x^2 + 107x + 2000$$

b) $x = 30$

$$C_{(30)} = \frac{30^3}{150} - 30^2 + 107 \cdot 30 + 2000$$

$$C_{(30)} = 4490$$

$x = 31$

$$C_{(31)} = \frac{31^3}{150} - 31^2 + 107 \cdot 31 + 2000$$

$$C_{(31)} = 4554{,}61$$

$$C_{(31)} - C_{(30)} = 4554{,}61 - 4490$$

$$C_{(31)} - C_{(30)} = 64{,}61$$

Ejercicio 9

Si el costo marginal es: $C^{´}(x) = 3x^2 - 18x + 30$. ¿Cuál es la disminución en el costo total $C_{(x)}$ cuando la producción total fabricada se reduce de 12 a 3 unidades?.

Solución:

$C^{´}(x) = 3x^2 - 18x + 30$

$$\int C^{´}(x)\,dx = \int (3x^2 - 18x + 30)\,dx$$

$$\int 3x^2\,dx - \int 18x\,dx + \int 30\,dx$$

$$= 3\frac{x^3}{3} - 18\frac{x^2}{2} + 30x$$

$$= x^3 - 9x^2 + 30x + c$$

$$C_{(x)} = x^3 - 9x^2 + 30x + 0$$

$x = 12$

$$C_{(12)} = 12^3 - 9 \cdot 12^2 + 30 \cdot 12$$

$$C_{(12)} = 792$$

$x = 3$

$$C_{(3)} = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 30 \cdot 3$$

$$C_{(12)} = 36$$

$$C_{(12)} - C_{(3)} = 792 - 36$$

$$C_{(31)} - C_{(30)} = 756$$

Ejercicio 10

El costo de producir máquinas de coser incluye un costo fijo de Bs 2000 y un costo variable de Bs 50 por máquina. Halle la función de costo total y el costo de producir 100 máquinas.

Solución:

$CF = Bs\ 2000$

$CV = Bs\ 50$

$$C_{(x)} = 50x + 2000$$

$C_{(100)} =?$

$$C_{(100)} = 50 \cdot 100 + 2000$$

$$C_{(100)} = 7000$$

Ejercicio 11

Un fabricante ha encontrado que el costo marginal de una empresa es : $C^{\prime}(x) = x + 3$, bolivianos por articulo cuando se han producido x artículos. El costo total de producción de los 4 primeros artículos es de Bs 520. ¿Cuál es el costo total de producción de los 8 primeros artículos?

Solución:

$C^{\prime}(x) = x + 3$

$$\int C^{\prime}(x)\, dx = \int (x + 3)\, dx$$

$$\int x\,dx + \int 3\,dx$$

$$C_{(x)} = \frac{x^2}{2} + 3x + CF$$

$C_{(4)} = 520$

$$C_{(4)} = \frac{4^2}{2} + 3 \cdot 4 + CF$$

$$520 = \frac{4^2}{2} + 3 \cdot 4 + CF$$

$$CF = 500$$

$$C_{(x)} = \frac{x^2}{2} + 3x + 500$$

$C_{(8)} = ?$

$$C_{(8)} = \frac{8^2}{2} + 3 \cdot 8 + 500$$

$$C_{(8)} = 556$$

Ejercicio 12

Un fabricante ha encontrado que su costo marginal es:

$C'(x) = 6x + 1$ bolivianos por unidad cuando se ha producido x unidades. El costo total de producción de la primera unidad es de Bs 130.

a) *¿Cuál es el costo de producción de las 10 primeras unidades?*
b) *¿Cuáles son los costos generales (el costo sin de producir alguna unidad)?*

Solución:

a)

$$\int C'(x)\,dx = \int (6x+1)\,dx$$

$$= \int 6x\,dx + \int 1\,dx$$

$$= 6\frac{x^2}{2} + x = 3x^2 + x$$

$$C_{(x)} = 3x^2 + x + CF$$

$C_{(1)} = 130$

$$C_{(1)} = 3 \cdot 1^2 + 1 + CF$$

$$130 = 3 \cdot 1^2 + 1 + CF$$

$$CF = 126$$

$$C_{(x)} = 3x^2 + x + 126$$

$C_{(10)} = ?$

$$C_{(10)} = 3 \cdot 10^2 + 10 + 126$$

$$C_{(10)} = 436$$

b)

$C_{(0)} = ?$

$$C_{(0)} = 3 \cdot 0^2 + 0 + 126$$

$$C_{(0)} = 126$$

Ejercicio 13

El costo marginal de cierta empresa está dado por:
$C'(x) = 24 - 0{,}03x + 0.006x^2$ *, Si el costo de producir 200 unidades es de Bs 22700,encuentre:*

a) *La función de costo total*
b) *El costo de producir 500 unidades*

Solución:

a)

$$\int C'(x)\,dx = \int (24 - 0{,}03x + 0.006x^2)\,dx$$

$$= \int 24\,dx - \int 0{,}03x + \int 0.006x^2\,dx$$

$$= 24x - 0{,}03\frac{x^2}{2} + 0.006\frac{x^3}{3}$$

$$C_{(x)} = 24x - 0{,}015x^2 + 0{,}002x^3 + CF$$

$$C_{(200)} = 22700$$

$$C_{(200)} = 24 \cdot 200 - 0{,}015 \cdot 200^2 + 0{,}002 \cdot 200^3 + CF$$

$$22700 = 24 \cdot 200 - 0{,}015 \cdot 200^2 + 0{,}002 \cdot 200^3 + CF$$

$$CF = 2500$$

$$C_{(x)} = 0{,}002x^3 - 0{,}015x^2 + 24x + 2500$$

b)

$$C_{(500)} = ?$$

$$C_{(500)} = 0{,}002 \cdot 500^3 - 0{,}015 \cdot 500^2 + 24 \cdot 500 + 2500$$

$$C_{(500)} = 260750$$

Ejercicio 14

Suponga que las funciones marginal y costo marginal para una firma son: $R^{\prime}(x) = 65 - 2x$ *y* $C^{\prime}(x) = 10$

a) Determina la función de ingreso total.
b) Si los costos fijos son Bs 250, describa las funciones de producción.

Solución:

a)

$$\int R^{\prime}(x)\,dx = \int (65 - 2x)\,dx$$

$$= \int 65\,dx - \int 2x\,dx$$

$$= 65x - 2\frac{x^2}{2}$$

$$R_{(x)} = 65x - x^2$$

b)

$$\int C^{\prime}(x)\,dx = \int 10\,dx$$

$$C_{(x)} = 10x + CF$$

$CF = 250$

$$C_{(x)} = 10x + 250$$

Ejercicio 15

La función de utilidad marginal de una empresa es:

$p'_{(x)} = 5 - 0{,}002x$ *y la empresa obtiene una utilidad de Bs 310 al vender 100 unidades. ¿Cuál es la función de utilidad de la empresa?*

Solución:

$$\int p'_{(x)}\,dx = \int (5 - 0{,}002x)\,dx$$

$$= \int 5\,dx - \int 0{,}002x\,dx$$

$$p_{(x)} = 5x - 0{,}002\frac{x^2}{2} + CF$$

$$p_{(100)} = 310$$

$$p_{(100)} = 5 \cdot 100 - 0{,}002\frac{100^2}{2} + CF$$

$$310 = 5 \cdot 100 - 0{,}002\frac{100^2}{2} + CF$$

$$CF = -180$$

$$p_{(x)} = -0{,}001x^2 + 5x - 180$$

Ejercicio 16

La función de ingreso de una empresa es:

$$R'(x) = 12 - 0{,}2x + 0{,}03x^2$$

a) Determinar la funcion ingreso
b) ¿Que ingreso se obtendra al vender 20 unidades?

Solución:

a)

$$\int R'(x)\,dx = \int (12 - 0{,}2x + 0{,}03x^2)\,dx$$

$$= \int 12\,dx - \int 0{,}2x\,dx + \int 0{,}03x^2\,dx$$

$$= 12x - 0{,}2\frac{x^2}{2} + 0{,}03\frac{x^3}{3}$$

$$R_{(x)} = 12x - 0{,}1x^2 + 0{,}01x^3$$

b) $R_{(20)} = ?$

$$R_{(20)} = 12 \cdot 20 - 0{,}1 \cdot 20^2 + 0{,}01 \cdot 20^3$$

$$R_{(20)} = 280$$

Ejercicio 17

La utilidad marginal diaria de una empresa está dada por:

$p'_{(x)} = -2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+900}}$ *, Si la empresa pierde Bs 130 por día cuando solo vende 40 unidades por día, determinar la función de la empresa.*

Solución:

$$\int p'_{(x)}\, dx = \int \left(-2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+900}}\right) dx$$

$$= -\int 2\, dx + \int \frac{x}{\sqrt{x^2+900}}\, dx$$

$$\text{Sea} : u = x^2 + 900 \quad du = 2xdx \quad \frac{du}{2} = xdx$$

$$-2x + \int \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{du}{2} = -2x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du$$

$$= -2x + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}} = -2x + \sqrt{x^2+900}$$

$$p_{(x)} = -2x + \sqrt{x^2+900} + c$$

$p_{(40)} = -130$

$$p_{(x)} = -2x + \sqrt{x^2 + 900} + C$$

$$p_{(40)} = -2 \cdot 40 + \sqrt{40^2 + 900} + C$$

$$-130 = -30 + C$$

$$C = -100$$

$$p_{(x)} = -2x + \sqrt{x^2 + 900} - 100$$

Ejercicio 18

El ingreso marginal de una empresa es: $R'_{(x)} = 10(20 - x)e^{-\frac{x}{20}}$

a) determinar las funciones de ingreso.
b) demanda del producto.

Solución:

a)

$$\int R'_{(x)}\, dx = \int 10(20 - x)e^{-\frac{x}{20}}\, dx$$

$$= 10\int (20 - x)e^{-\frac{x}{20}}\, dx = 10\left[\int \left(20e^{-\frac{x}{20}} - xe^{-\frac{x}{20}}\right) dx\right]$$

$$= 10\left[\int 20e^{-\frac{x}{20}}\, dx - \int xe^{-\frac{x}{20}}\, dx\right]$$

$$\begin{array}{ccccc} I & L & A & T & E \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & x & & e^{-\frac{x}{20}} \end{array}$$

$$u = x \qquad\qquad dv = e^{-\frac{x}{20}}dx$$

$$du = dx \qquad\qquad \int d\,v = \int e^{-\frac{x}{20}}\, dx$$

$$v = -20e^{-\frac{x}{20}}$$

$$= 10\left\{\int 20e^{-\frac{x}{20}}\,dx - \left[-20xe^{-\frac{x}{20}} - \int -20e^{-\frac{x}{20}}\,dx\right]\right\}$$

$$= 10\left\{\int 20e^{-\frac{x}{20}}\,dx - \left[-20xe^{-\frac{x}{20}} + \int 20e^{-\frac{x}{20}}\,dx\right]\right\}$$

$$= 10\left\{\int 20e^{-\frac{x}{20}}\,dx + 20xe^{-\frac{x}{20}} - \int 20e^{-\frac{x}{20}}\,dx\right\}$$

$$R_{(x)} = 200xe^{-\frac{x}{20}}$$

b)

$$R_{(x)} = x \cdot f_{(x)}$$

$$f_{(x)} = \frac{R_{(x)}}{x}$$

$$\frac{R_{(x)}}{x} = \frac{200xe^{-\frac{x}{20}}}{x}$$

$$f_{(x)} = 200e^{-\frac{x}{20}}$$

Ejercicio 19

El ingreso marginal por un producto está dado por:
$R'_{(x)} = 50 - 3x - x^2$. Encuentre la función de demanda para el producto.$(C = 0)$

Solución:

$$\int R'_{(x)}\,dx = \int 50 - 3x - x^2\,dx$$

$$= \int 50\,dx - \int 3x\,dx - \int x^2\,dx$$

$$R_{(x)} = 50x - 3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c$$

$$R_{(x)} = x \cdot f_{(x)}$$

$$f_{(x)} = \frac{R_{(x)}}{x}$$

$$\frac{R_{(x)}}{x} = \frac{50x - 3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{x}$$

$$f_{(x)} = 50 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}x^2$$

Ejercicio 20

La razón de instrumentos del precio unitario p(bolivianos) de la bota para mujer APEX está dado por $p'_{(x)} = \frac{-250x}{(16+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, donde x es la cantidad demandada diariamente en unidades de centena. Determinar la función de demanda para estas botas, si dicha cantidad es 300 pares ($x = 3$)cuando el precio unitario es Bs 50 el par.

Solución:

$$\int p'_{(x)}\, dx = \int \frac{-250x}{(16+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

Sea: $u = 16 + x^2 \quad du = 2xdx \quad \frac{du}{2} = xdx$

$$-250 \int \frac{1}{(u)^{\frac{3}{2}}} \frac{du}{2} = -\frac{250}{2} \int \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} du$$

$$= -125 \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}$$

$$p_{(x)} = 250\frac{1}{\sqrt{u}}$$

$$p_{(x)} = 250\frac{1}{\sqrt{16 + x^2}} + C$$

$p_{(3)} = 50$

$$p_{(3)} = 250\frac{1}{\sqrt{16 + 3^2}} + C$$

$$50 = 50 + C$$

$$C = 0$$

$$p_{(x)} = 250\frac{1}{\sqrt{16 + x^2}}$$

Ejercicio 21

Una compañía este considerando un nuevo proceso de fabricación. Si se sabe que la razón de ahorros del proceso $S'_{(t)}$

,

$S'_{(t)} = 1000(t+2)$, *donde* t *es el número de años que se ha usado en el proceso. Encuentre los ahorros totales durante el primer año. Encuentre los horarios totales durante los primeros 6 años.*

Solución:

$$\int S'_{(t)}\,dt = \int 1000(t+2)\,dt$$

$$1000\int t+2\,dt = 1000\left[\int t\,dt + \int 2\,dt\right]$$

$$= 1000\left[\frac{t^2}{2} + 2t\right] = 500t^2 + 2000t$$

$$S_{(t)} = 500t^2 + 2000t$$

$S_{(1)} =?$

$$S_{(t)} = 500\cdot 1^2 + 2000\cdot 1$$

$$S_{(1)} = 2500$$

$$S_{(6)} = 500\cdot 6^2 + 2000\cdot 6 = 30000$$

VI.- Propiedades de la integral definida

Consideremos dos funciones f y g integrables en $[a,b]$ y k un constante arbitrariamente, entonces:

1.	$$\int_a^b k\, f(x)dx = \mathrm{k}\int_a^b f(x)\,dx$$
2.	$$\int_a^b \left[f(x) \pm g_{(x)}\right] dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g_{(x)}\,dx$$
3.	$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Teorema fundamental del cálculo

Consideremos una función f continua en $[a,b]$ y sea F una función tal que : $F'_{(x)} = f_{(x)}, \forall\, x \in [a,b]$ *entonces:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F_{(b)} - F_{(a)}$$

$$\mathbf{40.-}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}(\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{4}\boldsymbol{x}+\mathbf{1})\,\boldsymbol{dx}$$

$$=\int_0^1 2x^2\,dx+\int_0^1 4x\,dx+\int_0^1 1\,dx$$

$$=2\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}+x=2\frac{x^3}{3}+2x^2+x$$

$$=\left(2\frac{x^3}{3}+2x^2+x\right)\Big|_0^1$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=F_{(b)}-F_{(a)}$$

$$=2\frac{1^3}{3}+2\cdot 1^2+1-2\frac{0^3}{3}+2\cdot 0^2+0$$

$$=\frac{11}{3}-0$$

$$\int_0^1(2x^2+4x+1)\,dx=\frac{11}{3}$$

41 .– $\boldsymbol{\int_1^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx}$

Sea $u = x^3 + 1 \quad du = 3x^2dx \quad \frac{du}{3} = x^2dx$

$$\int_1^2 \sqrt{x^3+1}\,x^2dx = \int_1^2 \sqrt{u}\,\frac{du}{3}$$

$$\frac{1}{3}\int_1^2 \sqrt{u}\;du = \frac{1}{3}\cdot 2\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F_{(b)} - F_{(a)}$$

$$= \frac{2}{9}(2^3+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}(1^3+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{9}(3^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}(2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9}\left(27 - 2\sqrt{2}\right)$$

$$\int_1^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{2}{9}\left(27 - 2\sqrt{2}\right)$$

$$\mathbf{42.-}\int_{0}^{3}(3x^2-2x+1)dx$$

$$\int_0^3 (3x^2-2x+1)dx = \int_0^3 3x^2\,dx - \int_0^3 2x\,dx + \int_0^3 1\,dx$$

$$= \left(3\frac{x^{2+1}}{2+1} - 2\frac{x^{1+1}}{1+1} + x\right) = \left(3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_0^3$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F_{(b)} - F_{(a)}$$

$$= 3^3 - 3^2 + 3 - (0^3 - 0^2 + 0)$$

$$= 21 - 0$$

$$\int_0^3 (3x^2-2x+1)dx = 21$$

$$\mathbf{43.-}\int_{0}^{4} \boldsymbol{x^2dx}$$

$$\int_{0}^{4} x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{0}^{4}$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F_{(b)} - F_{(a)}$$

$$\left.\frac{x^3}{3}\right|_{0}^{4} = \frac{4^3}{3} - \frac{0^3}{3}$$

$$\int_{0}^{4} x^2dx = \frac{64}{3}$$

$$\mathbf{44.-}\int_{0}^{1} \boldsymbol{x^{\frac{1}{2}}dx}$$

$$\int_{0}^{1} x^{\frac{1}{2}}dx = \left.\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_{0}^{1}$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F_{(b)} - F_{(a)}$$

$$\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{2\cdot 1^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2\cdot 0^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{45.-}\int_0^1 (1 + x - x^2 - 2x^3)dx$$

$$= \int_0^1 1dx + \int_0^1 xdx - \int_0^1 x^2dx - 2\int_0^1 x^3dx$$

$$= \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F_{(b)} - F_{(a)}$$

$$= \left(1 + \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{2}\right) - \left(0 + \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{2}\right)$$

$$\int_0^1 (1 + x - x^2 - 2x^3)dx = \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{46.}-\int_{1}^{2}(x^{2}-2x+3)\,dx$$

$$=\int_{1}^{2}x^{2}dx-\int_{1}^{2}2xdx+\int_{1}^{2}3dx$$

$$=\left(\frac{x^{3}}{3}-2\frac{x^{2}}{2}+3x\right)\Bigg|_{1}^{2}$$

$$\int_{a}^{b}f(x)\,dx=F_{(b)}-F_{(a)}$$

$$=\left(\frac{2^{3}}{3}-2^{2}+3\cdot 2\right)-\left(\frac{1^{3}}{3}-1^{2}+3\cdot 1\right)$$

$$=\frac{14}{3}-\frac{7}{3}=\frac{7}{3}$$

$$\int_{1}^{2}(x^{2}-2x+3)dx=\frac{7}{3}$$

$$\mathbf{47.} - \int_1^2 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{2x}\,dx + \int_1^2 \sqrt[3]{x}\,dx$$

$$= \left(\sqrt{2} \cdot 2\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + 3\,\frac{x^{\frac{4}{3}}}{4} \right) \Bigg|_1^2$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F_{(b)} - F_{(a)}$$

$$= \left(\sqrt{2} \cdot 2\,\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3} + 3\,\frac{2^{\frac{4}{3}}}{4} \right) - \left(\sqrt{2} \cdot 2\,\frac{1^{\frac{3}{2}}}{3} + 3\,\frac{1^{\frac{4}{3}}}{4} \right)$$

$$= 4{,}55 - 1{,}69 = 2{,}86$$

$$\int_1^2 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) dx = 2{,}86$$

48. $- \int_{1}^{4} (\boldsymbol{1 + x + \sqrt{x}}) \boldsymbol{dx}$

$$= \int_{1}^{4} 1dx + \int_{1}^{4} xdx + \int_{1}^{4} \sqrt{x}dx$$

$$= \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Bigg| \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix}$$

$$= \left(4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^{\frac{3}{2}}}{3} \right) - \left(1 + \frac{1^2}{2} + \frac{1^{\frac{3}{2}}}{3} \right)$$

$$= \frac{44}{3} - \frac{11}{6} = 12{,}83$$

$$\int_{1}^{4} (\boldsymbol{1 + x + \sqrt{x}}) \boldsymbol{dx} = 12{,}8$$

49. $-\int_0^1 (e^x - x)dx$

$$= \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 x dx$$

$$= \left(e^x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F_{(b)} - F_{(a)}$$

$$= \left(e^1 - \frac{1^2}{2}\right) - \left(e^0 - \frac{0^2}{2}\right)$$

$$= e - \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{3}{2}$$

$$\int_0^1 (e^x - x)dx = e - \frac{3}{2}$$

$$\mathbf{50.-}\int_{1}^{4}\frac{\mathbf{1}+\sqrt{\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{x}^{2}}\,\boldsymbol{dx}$$

$$=\int_{1}^{4}\frac{1}{x^{2}}dx+\int_{1}^{4}\frac{\sqrt{x}}{x^{2}}dx$$

$$=\left(-x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_{1}^{4}$$

$$\int_{a}^{b}f(x)\,dx=F_{(b)}-F_{(a)}$$

$$=\left(-4^{-1}-2\cdot 4^{-\frac{1}{2}}\right)-\left(-1^{-1}-2\cdot 1^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=-\frac{5}{4}+3=\frac{7}{4}$$

$$\int_{1}^{4}\frac{1+\sqrt{x}}{x^{2}}dx=\frac{7}{4}$$

Bibliografía

(1) ALGEBRA PRE-UNIVERSITARIO Paulino Choque Puña 2001

(2) ALGEBRA 2011 Rubiño Ediciones 2010

(3) ELEMENTOS DE CALCULO INFITESIMAL H.B Philips 1956

(4) DERIVADAS E INTEGRALES Enrique Luis Etchegoyen 1956

(5) CALCULO 1 Ron Larzon Bruce H. EDWARS 2010

(6) ELEMENTOS DE CALCULO INFINITESIMAL H.B Phillips 1956

(7) CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL Franh Ayres, Jr. Eliot Mendelson